TEORÍA DE LA ENERGÍA OSCURA COMO FLUIDO AUTO—REPLICANTE EN UN UNIVERSO CERRADO: COMBUSTIÓN GRAVITACIONAL CONFORME, EVAPORACIÓN POR GAUSS—BONNET, CONDENSADO ESCALAR Y LAGRANGIANO MAESTRO

Un marco unificado en el que la materia y los agujeros negros se disipan en un condensado escalar auto—replicante que infla el globo cósmico a ritmo acelerado

Dr. Carlos David Bianco Moreno

Cédula: V—17570016

carlosdavid1985@hotmail.es

WhatsApp: +58 412 433 2519

Julio de 2026

Resumen. Presentamos un marco teórico unificado para la energía oscura fundamentado en cinco pilares estructurales a una formulación para un fluido auto—replicante en un universo cerrado S^3. El primer desarrollo sustituye el acoplamiento fenomenológico $L_{\rm burn} = -\xi_{\rm burn}\rho_m\varphi$ por un marco de acoplamiento conforme $g^{\sim}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\, g_{\mu\nu}$ con $A(\varphi) = \exp(\beta\varphi/M_{\rm Pl})$, en el que la materia se acopla a la métrica de Jordan y la combustión gravitacional emerge naturalmente de la transformación al marco de Einstein, produciendo una tasa efectiva $\Gamma_{\rm burn} = \beta_{\rm eff}(\rho_m)\dot{\varphi}$ (con $\beta_{\rm eff}$ apantallado por un mecanismo tipo Camaleón) que preserva el Principio de Equivalencia Débil. El segundo desarrollo reemplaza el término $-\frac{1}{2}\xi R\varphi^2$ por un acoplamiento cuadrático al invariante de Gauss—Bonnet $\mathcal{L}_{\rm GB} = \frac{1}{2}(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi^2\,\mathcal{G}$, donde $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. La forma cuadrática es estructuralmente necesaria para activar la escalarización espontánea con umbral $\eta_c \simeq 0.0874$. Este invariante no se anula en el horizonte de Schwarzschild ($\mathcal{G} = 12/r_s^4 \neq 0$, a diferencia de $R = 0$), lo que activa un mecanismo de escalarización espontánea cerca del horizonte y amplifica la evaporación de agujeros negros. El tercer desarrollo promueve el campo escalar real con inestabilidad taquiónica a un campo complejo $\Phi = (\varphi/\sqrt{2})\, e^{i\theta}$ con simetría U(1) global, cuyo condensado de Bose—Einstein satisface $w_\varphi = -1$ estructuralmente y cuya auto—replicación está gobernada por un potencial químico μ según $\dot{n}_\varphi = \Gamma_{\rm rep}(t)\, n_\varphi\, (\mu - \mu_c)\, \mathcal{T}_k(\mu - \mu_c)$, con $\Gamma_{\rm rep}(t)$ causalmente acoplada a las transferencias de combustión y evaporación. El cuarto desarrollo reemplaza el término séxtico no renormalizable $\Lambda_6\varphi^6/6!$ por un potencial trigonométrico acotado $V(\varphi) = \{\Lambda_{\rm rep}[\cos(\varphi/\varphi_c) + 1] + V_{\rm vac}\}\,\mathcal{T}_k(\varphi - \varphi_c)$, con región taquiónica $(\varphi_c, \frac{\pi}{2}\varphi_c)$, $V_{\rm vac} \leq V \leq 2\Lambda_{\rm rep} + V_{\rm vac}$ (con $V_{\rm vac} \geq 0$) y renormalizabilidad garantizada por la suavidad analítica de $\mathcal{T}_k$. La quinta desarrollo permite el cruce dinámico de la barrera $w = -1$ mediante $w_{\rm eff} = w_\varphi + \delta w(A, \dot{\varphi}, \rho_m)$, compatible con las observaciones de DESI 2024. Derivamos el Lagrangiano maestro, las ecuaciones de Friedmann modificadas con términos de Gauss—Bonnet y acoplamiento conforme, las ecuaciones de Klein—Gordon y las leyes de conservación. Las predicciones observacionales incluyen $\Omega_k \sim -10^{-3}$, $\delta\Psi_{\rm GW} \sim 3.5 \times 10^{-3}$, $\Delta C_\ell/C_\ell \sim 10^{-3}$ y un cruce $w(z) = -1$ dinámico con $\delta w(z) \sim 10^{-3}$ (slow-roll) a $\sim 10^{-1}$ (cresta). Demostramos que la longitud de coherencia del condensado excede la circunferencia total del universo cerrado S^3 ($\sim 10^3$ Gpc para $\Omega_k \sim -10^{-3}$), garantizando la coherencia cuántica global del estado fundamental cosmológico.

Palabras clave: energía oscura, condensado de Bose—Einstein, gravedad de Gauss—Bonnet, marco conforme, universo cerrado, DESI.

---

1 Introducción y Motivación

El descubrimiento de la aceleración cósmica a finales del siglo XX [1, 2] estableció uno de los (continuando la línea de Einstein [16], Guth [15] y Starobinsky [14] sobre cosmología dinámica) enigmas más profundos de la física teórica contemporánea: la naturaleza de la energía oscura. A pesar de dos décadas de observaciones precisas del fondo cósmico de microondas (CMB) [3], de las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) y de las supernovas tipo Ia, la pregunta fundamental sigue abierta: ¿es la energía oscura una constante cosmológica Λ inerte, o se trata de un componente dinámico cuya ecuación de estado $w(z)$ evoluciona con el corrimiento al rojo?

La colaboración DESI 2024 [4, 51, 33] ha aportado evidencia observacional que sugiere una evolución dinámica de $w(z)$, con indicios de un cruce de la barrera fantasma $w = -1$ a alto corrimiento al rojo. Este resultado, si se confirma, descarta la constante cosmológica simple y demanda un marco teórico capaz de acomodar naturalmente dicho cruce sin violar las condiciones de energía ni inestabilidades fantasma.

En trabajos previos, el autor ha propuesto una teoría en la que la energía oscura se concibe como un fluido auto—replicante en un universo cerrado S^3, en el que la materia ordinaria y los

agujeros negros se disipan progresivamente en un condensado escalar que infla el globo cósmico. Esa formulación, aunque conceptualmente atractiva, presentaba cinco aspectos del marco que abordamos y desarrollamos en el presente trabajo:

(1) El término de combustión $L_{\rm burn} = -\xi_{\rm burn}\rho_m\varphi$ violaba el Principio de Equivalencia Débil al introducir un acoplamiento directo entre la densidad de materia y el campo escalar, sin mediación de un marco métrico bien definido.

(2) El acoplamiento $-\frac{1}{2}\xi R\varphi^2$ al escalar de curvatura se anula en el horizonte de Schwarzschild (donde $R = 0$), impidiendo la evaporación de agujeros negros por este canal.

(3) El campo escalar real con inestabilidad taquiónica no poseía una simetría global protectora y producía $w_\varphi \approx -1$ sólo de manera aproximada.

(4) El potencial séxtico $\Lambda_6\varphi^6/6!$ no era renormalizable y carecía de cota superior natural.

(5) La imposición $w \geq -1$ como restricción absoluta era incompatible con las observaciones de DESI 2024.

Cada una de estas aspectos se subsana en las secciones 3–7 mediante, respectivamente: (1) un marco de acoplamiento conforme de Jordan—Einstein; (2) un acoplamiento al invariante de Gauss—Bonnet; (3) un campo complejo con simetría U(1) y condensado de Bose—Einstein; (4) un potencial trigonométrico acotado y renormalizable; y (5) un cruce dinámico $w = -1$ mediado por el acoplamiento conforme.

El artículo está organizado como sigue. La Sección 2 enuncia los cinco postulados fundamentales y presenta el cuadro de parámetros. Las Secciones 3–7 desarrollan las cinco pilares estructurales. La Sección 8 deriva el Lagrangiano maestro y las ecuaciones de movimiento. La Sección 9 discute las predicciones observacionales. La Sección 10 aborda la termodinámica del condensado. La Sección 11 analiza la estabilidad de perturbaciones. La Sección 12 concluye. Dos apéndices complementan las derivaciones técnicas.

1.1 El problema de la constante cosmológica

La formulación estándar de la energía oscura como una constante cosmológica Λ enfrenta el bien conocido problema de la constante cosmológica [9]: el valor observado $\rho_\Lambda \sim (2.3 \times 10^{-3}\,\text{eV})^4$ es 10^{120} veces menor que la estimación naïve de la energía del punto cero del vacío cuántico al nivel de Planck, $\rho_{\rm vac} \sim M_{\rm Pl}^4 \sim (10^{28}\,\text{eV})^4$. Esta desavenencia monumental, conocida como la *catástrofe cosmológica*, sugiere que algún mecanismo de cancelación o de protección por simetría debe operar en la naturaleza.

En el marco que aquí presentamos, la energía oscura no es una constante cosmológica inerte, sino un condensado de Bose—Einstein cuya densidad de energía está determinada por la amplitud del potencial replicante $\Lambda_{\rm rep}$ y por la densidad de número del condensado n_φ. El pequeño valor de ρ_Λ emerge naturalmente de la pequeñez del autoacoplamiento $\lambda \sim 10^{-120}$ y de la escala de masa ultraligera $m_\varphi \lesssim 10^{-36}\,\text{eV}$, ambos protegidos por la simetría U(1) global del campo complejo. La auto—replicación controlada por el potencial químico μ garantiza además que la densidad no diverja, sino que se autorregule en torno al valor observado.

1.2 El contexto observacional de DESI 2024

La colaboración DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument) ha publicado en 2024 [4, 51, 33] un análisis de las oscilaciones acústicas de bariones que sugiere, con una significancia estadística de 2–3σ, una evolución dinámica del parámetro $w(z)$ de la ecuación de estado de la energía oscura. Los datos favorecen un modelo en el que $w < -1$ a alto corrimiento al rojo (régimen fantasma) y $w > -1$ a bajo corrimiento al rojo (régimen quintesencia), con un cruce $w = -1$ en $z_\times \sim 0.5$–1.

Este resultado, si se confirma con datos adicionales de DESI y de otros experimentos (Euclid, LSST), tendría implicaciones profundas: descartaría la constante cosmológica simple como única componente de la energía oscura y demandaría un marco teórico capaz de accommodar el cruce de la barrera fantasma sin inestabilidades catastróficas. Como demostramos en la Sección 7, el marco conforme aquí desarrollado reproduce naturalmente este comportamiento: el cruce $w = -1$ emerge de la interacción entre las contribuciones cinética, conforme y de Gauss—Bonnet, sin requerir ajuste fino de parámetros.

2 Postulados Fundamentales

La teoría que aquí presentamos descansa sobre cinco postulados que codifican las hipótesis físicas fundamentales. Cada postulado ha sido refinado respecto a el marco estándar para incorporar las pilares estructurales que dan título a este trabajo.

Postulado 1. El universo es una 3—esfera cerrada S^3 con topología compacta, sin frontera y de volumen total finito $V_{\rm tot} = 2\pi^2 R_{\rm curv}^3$, donde $R_{\rm curv}$ es el radio de curvatura. El parámetro de curvatura observacional satisface $\Omega_k \sim -10^{-3} < 0$, consistente con un universo cerrado. La circunferencia máxima del universo total (no sólo el observable) es $L_{\rm tot} = 2\pi R_{\rm curv} \sim 10^3\,{\rm Gpc}$.

Postulado 2. La materia ordinaria se acopla a la métrica conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\, g_{\mu\nu}$ (marco de Jordan), con $A(\varphi) = \exp(\beta\varphi/M_{\rm Pl})$. La combustión gravitacional emerge de la transformación al marco de Einstein y produce una tasa efectiva $\Gamma_{\rm burn} = \beta_{\rm eff}\dot{\varphi}$, donde $\beta_{\rm eff}(\rho_m)$ es un acoplamiento conforme apantallado por un mecanismo tipo Camaleón: $\beta_{\rm eff} \to \beta$ en el vacío cosmológico (donde la tasa $\Gamma_{\rm burn} = \beta\dot{\varphi}$ es cosmológicamente relevante) y $\beta_{\rm eff} \to 0$ en regiones de alta densidad astrofísica (Sistema Solar), cumpliendo así las cotas del efecto Nordtvedt ($\beta \leq 3 \times 10^{-3}/M_{\rm Pl}$). El Principio de Equivalencia Débil se preserva por construcción, pues toda la materia sigue geodésicas de $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Postulado 3 Los agujeros negros se evaporan mediante el acoplamiento al invariante de Gauss—Bonnet $\mathcal{L}_{\rm GB} = \frac{1}{2}(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi^2\,\mathcal{G}$, donde $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. La forma cuadrática del acoplamiento es esencial para la escalarización espontánea: garantiza que $\varphi = 0$ es solución trivial del campo, pero esta solución es inestable cerca del horizonte cuando $\eta = 8\pi\alpha_{\rm GB}^2$ excede el umbral $\eta_c \simeq 0.0874$, dando lugar a un pozo de potencial efectivo $\eta \cdot 12G^2M^2/(r^6 f)$ que sostiene modos ligados con $\omega^2 < 0$ (inestabilidad taquionica umbral). Puesto que $\mathcal{G} = 12/r_s^4 \neq 0$ en el horizonte, la evaporación es activa y se amplifica por escalarización espontánea, bajo la jerarquía teórica $\alpha_{\rm GB}^2/r_s^4 \gg \beta_{\rm eff}^2\rho_m/M_{\rm Pl}^2$ (Sección 4.4) que garantiza la dominancia del pozo taquionico GB sobre el apantallamiento Camaleón en entornos astrofísicos.

Postulado 4 El campo fundamental es un escalar complejo $\Phi = (\varphi/\sqrt{2})\,e^{i\theta}$ con simetría U(1) global. Su condensado de Bose—Einstein $\langle\Phi\rangle = \varphi_0/\sqrt{2}$ satisface $w_\varphi = -1$ estructuralmente en el atractor asint'otico. El potencial efectivo es genuinamente analítico (clase C^∞): $V_{\rm eff}(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \Lambda_{\rm rep}\,[\cos(\varphi/\varphi_c) + 1]\;\mathcal{T}_k(\varphi - \varphi_c) + V_{\rm vac}$, donde $V_{\rm vac} \sim \rho_\Lambda \sim (2.3 \times 10^{-3}\,{\rm eV})^4$ es la energía de vacío residual (constante cosmológica observada) que garantiza $V_{\rm eff} \geq V_{\rm vac} \geq 0$ en todo mínimo, evitando así que el atractor de de Sitter colapse a un estado anti—de Sitter. El shift $+1$ eleva los mínimos de $-\Lambda_{\rm rep}$ a $V_{\rm vac}$ sin alterar la estructura taquionica (que depende de V'', no de V).

Postulado 5 La auto—replicación del condensado está gobernada por el potencial químico μ según la ecuación cinética

$$\dot{n}_\varphi = \Gamma_{\rm rep}(t)\,n_\varphi\,(\mu(a) - \mu_c)\,\mathcal{T}_k(\mu(a) - \mu_c)\;, \quad \Gamma_{\rm rep}(t) = \frac{\Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH}}{n_\varphi\rho_\Lambda}\,\Gamma_0$$

donde n_φ es la densidad de número del condensado, μ_c es el potencial químico crítico y la tasa de replicación $\Gamma_{\rm rep}$ **no es un parámetro libre independiente**, sino causalmente acoplada a las transferencias energéticas entrantes (Sección 5.8):

$$\Gamma_{\rm rep}(t) \stackrel{\rm def}{=} \frac{\Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH}}{n_\varphi\,\rho_\Lambda}\,\Gamma_0\,, \tag{1}$$

con $\Gamma_0 \sim \mathcal{O}(1)$ un factor de eficiencia adimensional. Esta definición garantiza que la replicación es consecuencia directa de la energía disipada por materia y agujeros negros, preservando la conservación microscópica de la energía (Teorema 5.4). La replicación se activa cuando $\mu > \mu_c$ y no requiere inestabilidad taquíonica destructiva.

2.1 Cuadro de parámetros fundamentales

El Cuadro 1 reúne los valores de los parámetros del modelo, junto con las restricciones observacionales o teóricas que los acotan.

La elección de estas escalas se justifica como sigue. La masa $m_\varphi \lesssim 10^{-36}\,{\rm eV}$ es típica de la materia oscura ultraligera (fuzzy dark matter) y garantiza que la longitud de onda de Compton $\lambda_C = \hbar/(m_\varphi c)$ exceda la escala cosmológica. El autoacoplamiento $\lambda \sim 10^{-120}$ es del orden

Table 1: Parámetros del modelo y sus escalas características.

Símbolo	Valor estimado	Descripción
m_φ	$\lesssim 10^{-36}\,\mathrm{eV}$	Masa del bosón escalar (ultraligero)
λ	$\sim 10^{-120}$	Autoacoplamiento cuártico
Λ_{rep}	$\sim 10^{-3}\,\mathrm{eV}^4$	Amplitud del potencial replicante
V_{vac}	$\sim (2.3\times 10^{-3}\,\mathrm{eV})^4$	Energía de vacío residual (constante cosmológica)
Λ_{UV}	$\sim 10^{60}\,\mathrm{eV}$	Cutoff ultravioleta del EFT (escala de acoplamiento fuerte)
φ_c	$\sim M_{\mathrm{Pl}}$	Escala de activación del potencial trigonométrico
β	$\sim 1/M_{\mathrm{Pl}}$	Acoplamiento conforme (en vacío cosmológico)
β_{eff}	ρ_m-dep.	Acoplamiento apantallado por Camaleón
Λ_{ch}	$\sim 10^{-3}\,\mathrm{eV}^4$	Escala de Camaleón
n_{ch}	$\sim \mathcal{O}(1)$	Índice del potencial Camaleón
α_{GB}	$\sim \mathcal{O}(1{-}10^3)$ adim.	Acoplamiento de Gauss—Bonnet (rango ampliado, ver App. G.1.1)
ξ	1/6	Acoplamiento conforme estándar
Γ_{burn}	$\beta\dot\varphi \sim 10^{-34}\,\mathrm{eV}$	Tasa de combustión gravitacional
Γ_{evap}	$\sim 10^{-33}\,\mathrm{eV}$ ($\alpha_{\mathrm{GB}}{\sim}1$)	Tasa de evaporación por GB (escala como α^2_{GB}, ver App. G.2)
Γ_{rep}	$\rho_m, \rho_{\mathrm{BH}}$-dep.	Tasa de replicación (causalmente acoplada)

requerido para que la energía de vacío del condensado reproduzca la densidad crítica observada $\rho_\Lambda \sim (2.3\times 10^{-3}\,\mathrm{eV})^4$. La amplitud $\Lambda_{\mathrm{rep}} \sim 10^{-3}\,\mathrm{eV}^4$ coincide con la escala de la energía oscura. Los acoplamientos $\beta \sim \mathcal{O}(0{,}1)$ y $\alpha_{\mathrm{GB}} \sim \mathcal{O}(1{-}10^3)$ son los valores naturales para (el rango superior $\alpha_{\mathrm{GB}} \sim 10^3$ es requerido para reproducir la amplitud de δw observada por DESI DR2, ver Apéndice G.2). acoplamientos gravitacionales de orden uno, y $\xi = 1/6$ es el valor del acoplamiento conforme mínimo que preserva la invarianza conforme del campo escalar en el límite de masa nula [8, 40, 41].

2.2 Motivación topológica del universo cerrado

El Postulado P1, que afirma la topología cerrada S^3 del universo, merece una justificación adicional. Desde el punto de vista de la topología diferencial, una 3—variedad compacta y simplemente conexa sin frontera está clasificada, por el teorema de Poincaré (probado por Perelmán en 2003), como la 3—esfera S^3. Si adoptamos la hipótesis de compacidad y conexidad simple del universo total (no sólo el observable), la topología S^3 es la única posibilidad topológica.

Además, desde el punto de vista físico, un universo cerrado S^3 tiene varias ventajas sobre un universo plano o abierto:

- **Ausencia de frontera:** el universo no necesita condiciones de frontera exteriores, evitando el problema de qué hay *fuera* del universo.
- **Volumen finito:** la finitud del volumen total $V_{\mathrm{tot}} = 2\pi^2 R^3_{\mathrm{curv}}$ permite definir un potencial químico global y una carga de Número total bien definida (Ec. (39)).
- **Estabilidad cuántica:** en un universo cerrado, el espectro de energía es discreto, evitando divergencias infrarrojas.
- **Compatibilidad observacional:** las observaciones de Planck [3] dan $\Omega_k = +0.0007 \pm 0.0019$, consistente con $\Omega_k < 0$ (universo cerrado) dentro de 1σ.

La elección $\Omega_k \sim -10^{-3}$ corresponde a un radio de curvatura $R_{\mathrm{curv}} \sim 136\,\mathrm{Gpc}$ y una circunferencia total $L_{\mathrm{tot}} \sim 10^3\,\mathrm{Gpc}$. Este valor es lo suficientemente pequeño para ser detectable en

futuras observaciones de CMB (CMB—S4) y lo suficientemente grande para ser consistente con las cotas actuales.

3 Marco de Acoplamiento Conforme

3.1 Métrica de Jordan y métrica de Einstein

La primera desarrollo estructural reemplaza el término de combustión fenomenológico $L_{\rm burn} = -\xi_{\rm burn}\rho_m\varphi$ por un marco de acoplamiento conforme rigurosamente definido. Siguiendo la construcción clásica de Damour y Esposito—Farése [5], introducimos la métrica de Jordan

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\, g_{\mu\nu}\,, \qquad A(\varphi) = \exp\!\left(\frac{\beta\,\varphi}{M_{\rm Pl}}\right), \tag{2}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del marco de Einstein (en la que la acción gravitacional es la de Einstein—Hilbert canónica) y $\tilde{g}_{\mu\nu}$ es la métrica a la que se acopla la materia. El sector de materia se describe por una acción

$$S_m[\tilde{g}_{\mu\nu}, \psi_m] = \int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-\tilde{g}}\; \tilde{\mathcal{L}}_m(\tilde{g}_{\mu\nu}, \psi_m)\,, \tag{3}$$

donde ψ_m denora colectivamente los campos de materia. Por construcción, toda la materia sigue las geodésicas de $\tilde{g}_{\mu\nu}$, lo que preserva el Principio de Equivalencia Débil: en un campo gravitacional dado, todos los cuerpos de prueba caen con la misma aceleración independientemente de su composición.

3.2 Emergencia de la combustión gravitacional

La clave de la primera desarrollo reside en que la combustión gravitacional no se postula explícitamente, sino que emerge de la transformación del marco de Jordan al marco de Einstein. Variando la acción total con respecto a $g^{\mu\nu}$ en el marco de Einstein, el tensor energía—momento de la materia definido como

$$T^{\mu}{}_{\nu}{}^{(m)} \stackrel{\rm def}{=} -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$$

no se conserva de manera autónoma. En su lugar, se satisface la ecuación de balance [5]

$$\nabla_\mu T^{\mu}{}_{\nu}{}^{(m)} = -\frac{\beta_{\rm eff}(\rho_m)}{M_{\rm Pl}}\, T^{(m)}\, \nabla_\nu\varphi\,, \tag{4}$$

donde $T^{(m)} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}{}^{(m)}$ es la traza del tensor energía—momento en el marco de Jordan. Para materia presión—menos (polvo no relativista), $T^{(m)} \simeq -\rho_m$, y la Ec. (4) se reduce en un fondo FLRW homogéneo a

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -\beta_{\rm eff}\,\dot{\varphi}\,\rho_m\,,\,. \tag{5}$$

Proposición 3.1. *La tasa efectiva de combustión gravitacional que emerge del marco conforme es*

$$\Gamma_{\rm burn} = \beta_{\rm eff}(\rho_m)\,\dot{\varphi}\,, \tag{6}$$

donde $\beta_{\rm eff}(\rho_m)$ es el acoplamiento conforme apantallado por el mecanismo Camaleón (Sección 3.5), que satisface $\beta_{\rm eff} \to \beta \sim \mathcal{O}(1/M_{\rm Pl})$ en el vacío cosmológico ($\rho_m \to \rho_\Lambda$) y $\beta_{\rm eff} \to 0$ en regiones de alta densidad astrofísica ($\rho_m \gg \rho_\Lambda$).

La Ec. (6) reproduce el valor $\Gamma_{\rm burn} \sim 10^{-34}\,\text{eV}$ del Cuadro 1 cuando $\dot{\varphi} \sim H_0 \sim 10^{-33}\,\text{eV}$ y $\beta \sim \mathcal{O}(0{,}1)$. Una ventaja fundamental del marco conforme sobre el acoplamiento fenomenológico anterior es la preservación automática del Principio de Equivalencia Débil. En el marco estándar con $L_{\rm burn} = -\xi_{\rm burn}\rho_m\varphi$, el acoplamiento dependía de la densidad de materia ρ_m, lo que implicaba que cuerpos de diferente composición (y por tanto diferente ρ_m interna) experimentaban fuerzas diferencialmente acopladas al campo escalar, violando la universalidad de la caída libre.

En contraste, en el marco conforme, el acoplamiento está mediado únicamente por la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, que es universal para toda la materia. La Ec. (4) muestra que la transferencia de energía depende de $T^{(m)}$ (la traza), no de la composición química, y que en el límite no relativista la tasa $\Gamma_{\rm burn}$ es proporcional a $\dot{\varphi}$, que es un campo de fondo común a toda la materia. Así, la combustión gravitacional conforme es universal y compatible con las cotas observacionales sobre violaciones del Principio de Equivalencia [52, 42, 11].

3.3 Cotas observacionales sobre el acoplamiento conforme

El acoplamiento conforme β está sujeto a cotas observacionales estrictas provenientes de varios frentes:

(i) Efecto Nordtvedt. En teorías escalar—tensoriales con acoplamiento conforme, los cuerpos astrofísicos autopoderados (como la Luna y la Tierra) pueden seguir geodésicas ligeramente distintas, produciendo una desviación en la distancia Tierra—Luna medible por *lunar laser ranging*. La cota actual sobre el parámetro de Eddington $\gamma_{\rm PPN}$ da $|\gamma_{\rm PPN} - 1| < 2.3 \times 10^{-5}$ [52, 42, 11], lo que se traduce en $\beta^2 \lesssim 10^{-5}$, o equivalentemente $\beta \lesssim 3 \times 10^{-3}/M_{\rm Pl}$.

(ii) Test de equivalencia de sección eficaz. La dependencia de las secciones eficaces de interacción nuclear en el entorno gravitacional (efecto de Damour—Esposito—Farèse) constrñe β a niveles comparables.

(iii) Observaciones de púlsares binarios. La radiación dipolar escalar, ausente en GR pero presente en teorías escalar—tensoriales, está constreñida por las observaciones de púlsares binarios a niveles $\beta \lesssim 10^{-2}/M_{\rm Pl}$ [52, 42, 11].

Sin el mecanismo de apantallamiento que se introduce en la Sección 3.5, el valor $\beta \sim 1/M_{\rm Pl}$ adoptado en el Cuadro 1 entraría en conflicto directo con la cota del efecto Nordtvedt $\beta \leq 3 \times 10^{-3}/M_{\rm Pl}$ por un factor $\sim 10^2$. El mecanismo Camaleón resuelve esta tensión: en regiones de alta densidad (Sistema Solar, donde se midieron las cotas), el acoplamiento efectivo $\beta_{\rm eff}$ se suprime exponencialmente, $\beta_{\rm eff} \sim \beta\,\epsilon_{\rm th}$ con $\epsilon_{\rm th} \ll 1$ el parámetro de ćapa fina' (thin-shell), mientras que en el vacío cosmológico se restaura $\beta_{\rm eff} \to \beta$, preservando así la tasa cosmológicamente relevante $\Gamma_{\rm burn} = \beta\dot{\varphi}$.

3.4 Transformación de cantidades físicas entre marcos

La transformación del marco de Jordan al marco de Einstein preserva algunas cantidades físicas y modifica otras. Las transformaciones clave son:

- **Métrica:** $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi)\,g_{\mu\nu}$, $\tilde{g}^{\mu\nu} = A^{-2}(\varphi)\,g^{\mu\nu}$.
- **Determinante:** $\sqrt{-\tilde{g}} = A^4(\varphi)\,\sqrt{-g}$.

- **Conexión:** $\tilde{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + 2(\partial_\mu \ln A)\,\delta^\nu_\rho$.
- **Escalar de curvatura:** $\tilde{R} = A^{-2}\big[R - 6\,\Box \ln A - 6(\nabla \ln A)^2\big]$.
- **Densidad de materia:** $\tilde{\rho}_m = A^{-4}\rho_m^{\rm eff}$ (la densidad se transforma como A^{-4} porque es una densidad de energía en 4 dimensiones).

Estas transformaciones garantizan que las observaciones físicas (medidas en el marco de Jordan, donde la materia es minimamente acoplada) se traducen correctamente al marco de Einstein, donde las ecuaciones de movimiento tienen su forma más simple.

3.5 Mecanismo de apantallamiento tipo Camaleón

Para reconciliar el acoplamiento conforme cosmológicamente relevante $\beta \sim 1/M_{\rm Pl}$ con las cotas del Sistema Solar ($\beta \leq 3\times10^{-3}/M_{\rm Pl}$ por el efecto Nordtvedt), incorporamos un mecanismo de apantallamiento tipo Camaleón [45, 35]. La idea central es que el campo escalar φ adquiere una masa efectiva $m_{\rm eff}(\rho_m)$ que depende de la densidad local de materia, de modo que en regiones de alta densidad la masa es grande (rango de Yukawa corto, supresión del campo) y en regiones de baja densidad la masa es pequeña (rango largo, acoplamiento activo).

El potencial Camaleón efectivo se construye como una suma del potencial trigonométrico replicante (Sección 6) y un término de interacción con la materia:

$$V_{\rm cham}(\varphi) = V_{\rm eff}(\varphi) + \rho_m\, A(\varphi) = V_{\rm eff}(\varphi) + \rho_m\, e^{\beta\varphi/M_{\rm Pl}}\,, \tag{7}$$

donde $V_{\rm eff}$ es el potencial de la Ec. (41) y $A(\varphi)$ es el factor conforme de Jordan. El mínimo efectivo $\varphi_{\rm min}(\rho_m)$ se obtiene de $\partial V_{\rm cham}/\partial\varphi = 0$:

$$\left.\frac{{\rm d}V_{\rm eff}}{{\rm d}\varphi}\right|_{\varphi_{\rm min}} + \frac{\beta\,\rho_m}{M_{\rm Pl}}\,e^{\beta\varphi_{\rm min}/M_{\rm Pl}} = 0\,. \tag{8}$$

La masa efectiva cuadrática alrededor de este mínimo es

$$m^2_{\rm eff}(\rho_m) = \left.\frac{\partial^2 V_{\rm cham}}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi_{\rm min}} = V''_{\rm eff}(\varphi_{\rm min}) + \frac{\beta^2\rho_m}{M^2_{\rm Pl}}\,e^{\beta\varphi_{\rm min}/M_{\rm Pl}}\,. \tag{9}$$

En el vacío cosmológico ($\rho_m \to \rho_\Lambda \sim 10^{-3}\,{\rm eV}^4$), el segundo término es subdominante y $m_{\rm eff} \sim m_\varphi \lesssim 10^{-36}\,{\rm eV}$, permitiendo que el campo evolucione a escalas cosmológicas y la tasa $\Gamma_{\rm burn} = \beta\dot{\varphi}$ sea observable. En el Sistema Solar ($\rho_m \sim \rho_\oplus \sim 10^3\,{\rm kg/m^3}$, $\rho_\oplus/\rho_\Lambda \sim 10^{30}$), el segundo término domina, $m^2_{\rm eff} \sim \beta^2\rho_m/M^2_{\rm Pl} \gg H_0^2$, y el campo es forzado a $\varphi \approx \varphi_{\rm min}(\rho_m)$ con un rango de Yukawa $m^{-1}_{\rm eff} \ll R_\oplus$ que suprime cualquier fuerza de quinta interacción en el laboratorio.

Proposición 3.2 (Capa fina y supresion del acoplamiento)**.** *Para un cuerpo astrofísico autopoderado de radio R y potencial newtoniano $\Phi_N = GM/R$, el parámetro de capa fina 'thin-shell' está dado por*

$$\epsilon_{\rm th} = \frac{\Delta\varphi}{6\,\beta\,M_{\rm Pl}\,\Phi_N} \sim \frac{\varphi_\infty - \varphi_{\rm min}(\rho_{\rm int})}{6\,\beta\,M_{\rm Pl}\,\Phi_N}\,, \tag{10}$$

donde φ_∞ es el valor asintótico del campo (en el vacío cosmológico) y $\varphi_{\rm min}(\rho_{\rm int})$ es el valor en el interior del cuerpo. El acoplamiento efectivo entre el cuerpo y el campo escalar es

$$\beta_{\rm eff}(\rho_m) = \beta\,\min[1,\,3\,\epsilon_{\rm th}] = \begin{cases} \beta & \text{en el vacío cosmológico } (\rho_m \to \rho_\Lambda)\,, \\ 3\,\beta\,\epsilon_{\rm th} \ll \beta & \text{en el Sistema Solar } (\rho_m \gg \rho_\Lambda)\,. \end{cases} \tag{11}$$

Para la Tierra, $\Phi_N^\oplus \sim 10^{-9}$ y $\epsilon_{\rm th} \sim 10^{-5}$, de modo que $\beta_{\rm eff}^\oplus \sim 3\times10^{-5}\,\beta \sim 3\times10^{-5}/M_{\rm Pl}$, que cumple holgadamente la cota Nordtvedt $\beta_{\rm eff} \le 3\times10^{-3}/M_{\rm Pl}$.

El mecanismo Camaleón, por tanto, restaura la consistencia fenomenológica del modelo con todas las cotas del Sistema Solar (Nordtvedt, p'ulsares binarios, test de equivalencia de sección eficaz) sin sacrificar la tasa cosmológicamente relevante $\Gamma_{\rm burn} = \beta\dot\varphi \sim 10^{-34}\,$eV en el vacío. Esta es la solución estructural al conflicto entre el valor natural $\beta \sim 1/M_{\rm Pl}$ y las cotas astrofísicas, evitando el ajuste fino del parámetro β a valores antinaturales.

4 Evaporación por Acoplamiento a Gauss—Bonnet

4.1 El invariante de Gauss—Bonnet

El segundo desarrollo estructural sustituye el acoplamiento $-\frac{1}{2}\xi R\varphi^2$ al escalar de curvatura R por un acoplo al invariante de Gauss—Bonnet

$$\mathcal{G} \stackrel{\rm def}{=} R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\,. \tag{12}$$

Este invariante juega un papel destacado en la gravedad modificada por dos razones fundamentales. Primero, en cuatro dimensiones $\mathcal{G}$ es una densidad topológica (su integral sobre una variedad compacta sin frontera es una constante topológica, el invariante de Euler), de modo que un acoplo $(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\mathcal{G}$ sin campo escalar no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, un acoplo $\frac{1}{2}(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi^2\mathcal{G}$ sí contribuye, pues la dependencia explícita en φ rompe la trivialidad topológica. La elección de la forma cuadrática φ^2 (en lugar de la lineal φ) es estructuralmente necesaria para activar el mecanismo de escalarización espontánea estándar: con acoplamiento lineal, la ecuación del campo escalar contiene una fuente constante $\alpha\mathcal{G}$ que fuerza $\varphi \neq 0$ en todo el espacio-tiempo, eliminando la inestabilidad umbral característica de la escalarización. Con la forma cuadrática, $\varphi = 0$ es solución pero el operador linealizado adquiere una masa efectiva negativa cerca del horizonte [21, 12]. Segundo, $\mathcal{G}$ es el invariante de curvatura cuadrático de menor orden que preserva las ecuaciones de movimiento de segundo orden, en virtud del teorema de Lovelock—Horndeski [12, 13].

4.2 No anulación en el horizonte de Schwarzschild

La motivación física central de esta desarrollo reside en el comportamiento de $\mathcal{G}$ frente a R en el horizonte de agujeros negros. Para la métrica de Schwarzschild

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\,\mathrm{d}t^2 + f(r)^{-1}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2\,, \qquad f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}\,,$$

el escalar de curvatura se anula idénticamente:

$$R = 0 \qquad \text{(en todo el espacio—tiempo de Schwarzschild).} \tag{13}$$

Por consiguiente, un acoplamiento $-\frac{1}{2}\xi R\varphi^2$ no produce ningúna fuerza sobre el campo escalar cerca del horizonte, y la evaporación por este canal es inactiva.

En cambio, el invariante de Gauss—Bonnet no se anula. Un cómputo directo [**?**, 43] da

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Schw}} = \frac{48\,G^2M^2}{r^6} = \frac{12}{r_s^4}\left(\frac{r_s}{r}\right)^6\,, \tag{14}$$

donde $r_s = 2GM$ es el radio de Schwarzschild. En el horizonte, $r = r_s$:

$$\boxed{\mathcal{G}\big|_{r=r_s} = \frac{12}{r_s^4} \neq 0} \tag{15}$$

Teorema 4.1. *El acoplamiento cuadrático $\frac{1}{2}(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})\varphi^2\mathcal{G}$ produce una fuerza efectiva sobre el campo escalar en el horizonte de Schwarzschild, dada por*

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}\right|_{\mathrm{GB}} = (\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})\,\varphi\,\mathcal{G}\big|_{r=r_s} = \frac{12(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})\,\varphi|_{r_s}}{r_s^4}\,, \tag{16}$$

mientras que el acoplamiento $-\frac{1}{2}\xi R\varphi^2$ produce una fuerza nula idénticamente. La forma cuadrática es estructuralmente necesaria: garantiza que $\varphi = 0$ es solución trivial del campo ($\delta\mathcal{L}/\delta\varphi|_{\varphi=0} = 0$), pero esta solución es inestable cerca del horizonte (Sección 4.3), que es precisamente la condición requerida para la escalarización espontánea estándar.

Proof. La contribución del término de Gauss—Bonnet a la ecuación de movimiento del campo escalar es $\delta[\frac{1}{2}(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})\varphi^2\mathcal{G}]/\delta\varphi = (\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})\varphi\mathcal{G}$. Sustituyendo $\mathcal{G}$ por su valor en el horizonte, Ec. (15), se obtiene la Ec. (16). En contraste, el término $-\frac{1}{2}\xi R\varphi^2$ contribuye $-\xi R\varphi = 0$ en Schwarzschild, por la Ec. (13). Nótese que con acoplamiento lineal $\alpha\varphi\mathcal{G}$, la variación daría $\alpha\mathcal{G} \neq 0$ incluso para $\varphi = 0$, forzando el campo a valores no nulos y eliminando la inestabilidad umbral necesaria para la escalarización espontánea. □

4.3 Escalarización espontánea

El acoplamiento cuadrático a Gauss—Bonnet da lugar a un fenómeno de escalarización espontánea cerca del horizonte, análogo al mecanismo de escalarización espontánea en teorías escalar—tensoriales con acoplamiento a Gauss—Bonnet descrito por Doneva, Yazadjiev y colaboradores

[6, 7, 42]. La ecuación del campo escalar linealizada alrededor de un agujero negro de Schwarzschild es

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 f(r)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \eta\,\frac{12\,G^2M^2}{r^6\,f(r)}\right]\varphi = 0\,, \tag{17}$$

donde $\eta = 8\pi\alpha_{\rm GB}^2$ es un parámetro efectivo. El término $-\eta\cdot 12G^2M^2/(r^6 f)$ actúa como una contribución **negativa** a la masa efectiva cuadrática $m_{\rm eff}^2(r)$ cerca del horizonte, generando un pozo de potencial taquionico que sostiene modos ligados con $\omega^2 < 0$ (inestabilidad taquionica umbral), correspondientes a la formación espontánea de pelo escalar (*scalar hair*). El signo negativo emerge naturalmente de la variacion del acoplamiento cuadratico $\frac{1}{2}\alpha\varphi^2\mathcal{G}$ en el fondo de Schwarzschild y es esencial para el mecanismo: con un acoplamiento lineal $\alpha\varphi\mathcal{G}$, la ecuacion tendria un termino fuente $\alpha\mathcal{G} \neq 0$ (no homogenea), forzando $\varphi \neq 0$ sin umbral de inestabilidad.

Proposición 4.2. *La escalarización espontánea ocurre cuando el parámetro $\eta = 8\pi\alpha_{\rm GB}^2$ excede un umbral crítico $\eta_c \simeq 0.0874$ [7]. Este umbral solo está bien definido para el acoplamiento cuadrático $\frac{1}{2}\alpha\varphi^2\mathcal{G}$, pues requiere que $\varphi = 0$ sea solución (linealizada) del campo escalar. Para $\alpha_{\rm GB} \sim \mathcal{O}(1)$, se tiene $\eta \sim 8\pi\alpha_{\rm GB}^2 \sim \mathcal{O}(1)$, que excede holgadamente η_c y activa la escalarización.*

La escalarización espontánea produce un *pelo escalar* alrededor de cada agujero negro, incrementando la pérdida de masa por evaporación. La tasa efectiva de evaporación se amplifica respecto a la evaporación de Hawking térmica:

$$\Gamma_{\rm evap} \sim \frac{\alpha_{\rm GB}^2}{M_{\rm Pl}^2\, r_s^4} \sim \frac{1}{M_{\rm Pl}^2\, r_s^4}\,, \tag{18}$$

que para agujeros negros primordiales de masa $M \sim M_\odot$ ($r_s \sim 3\,\mathrm{km}$) da $\Gamma_{\rm evap} \sim 10^{-33}\,\mathrm{eV}$, consistente con el Cuadro 1.

4.4 Jerarquía teórica entre escalarización GB y apantallamiento Camaleón

Una cuestión crítica de consistencia surge de la coexistencia de dos mecanismos opuestos: el acoplamiento cuadrático GB activa la escalarización espontánea cerca del horizonte mediante un pozo de potencial taquionico de magnitud $\eta\cdot 12G^2M^2/(r^6 f)$, mientras que el mecanismo Camaleón dota al campo escalar de una masa efectiva $m_{\rm eff}(\rho_m)$ que aumenta con la densidad local de materia. Si esta masa apantalladora dominara sobre el pozo taquionico GB cerca del horizonte, la escalarización quedaría suprimida y la evaporación por GB se desactivaría.

Proposición 4.3 (Jerarquía de dominancia GB)**.** *La escalarización espontánea cerca del horizonte de Schwarzschild es fenomenológicamente activa si y solo si se satisface la jerarquía*

$$\frac{\alpha_{\rm GB}^2}{r_s^4} \gg \frac{\beta_{\rm eff}^2(\rho_m)\,\rho_m}{M_{\rm Pl}^2}\,, \tag{19}$$

que garantiza que el invariante de curvatura en el horizonte $\mathcal{G}|_{r_s} = 12/r_s^4$ domina sobre la masa apantalladora Camaleón $m_{\rm eff}^2(\rho_m) \sim \beta_{\rm eff}^2\rho_m/M_{\rm Pl}^2$ (Ec. (9)).

Proof. La ecuación de escalarización (17) incluye el término GB $-\eta\cdot 12G^2M^2/(r^6 f)$ como masa efectiva negativa. En presencia del Camaleón, se añade un término positivo $+m_{\rm eff}^2(\rho_m)$ a la

masa efectiva total. Para que el pozo taquionico GB no sea anulado, se requiere $|-\eta \cdot 12/r_s^4| > m_{\rm eff}^2(\rho_m)$, lo que da la jerarquía (19) al sustituir $\eta = 8\pi\alpha_{\rm GB}^2$ y $m_{\rm eff}^2 \sim \beta_{\rm eff}^2\rho_m/M_{\rm Pl}^2$. □

Verificación cuantitativa: para un agujero negro de masa solar ($r_s \sim 3\,\text{km} \sim 1.5\times10^{-16}\,\text{eV}^{-1}$) en el medio interestelar ($\rho_{\rm ISM} \sim 10^{-21}\,\text{kg/m}^3 \sim 10^{-12}\,\text{eV}^4$), se tiene

$$\frac{\alpha_{\rm GB}^2}{r_s^4} \sim \frac{1}{(1.5\times10^{-16})^4} \sim 10^{63}\,\text{eV}^4\,, \qquad \frac{\beta_{\rm eff}^2\rho_{\rm ISM}}{M_{\rm Pl}^2} \sim \frac{(3\times10^{-5}/M_{\rm Pl})^2\cdot10^{-12}}{M_{\rm Pl}^2} \sim 10^{-73}\,\text{eV}^4\,, \quad (20)$$

donde hemos usado $\beta_{\rm eff}^{\oplus} \sim 3\times10^{-5}/M_{\rm Pl}$ (Proposición 3.2). La jerarquía se satisface por ~ 136 **órdenes de magnitud**, lo que garantiza que la escalarización es fenomenológicamente activa incluso en presencia del Camaleón. La situación solo sería problemática en entornos de extrema densidad como discos de acreción ($\rho \sim 10^3\,\text{kg/m}^3$), donde la jerarquía se reduce a ~ 80 órdenes de magnitud (todavía confortablemente satisfecha).

Observación. Esta verificación cuantitativa confirma que la preocupación teórica sobre la interferencia Camaleón—escalarización no se materializa fenomenológicamente para los parámetros del modelo. Además, en el vacío cosmológico ($\rho_m \to \rho_\Lambda \sim 10^{-3}\,\text{eV}^4$), la jerarquía se satisface aún más holgadamente, garantizando la operatividad del canal GB en todo el rango cosmológico relevante.

4.5 Comparación con la evaporación de Hawking

Es instructivo comparar la evaporación por Gauss—Bonnet con la evaporación térmica de Hawking [20]. La tasa de Hawking para un agujero negro de Schwarzschild es

$$\Gamma_{\rm Hawking} \sim \frac{1}{M^3} \sim \frac{1}{(M_\odot)^3} \sim 10^{-83}\,\text{eV}\,, \quad (21)$$

que es despreciable a escalas cosmológicas para agujeros negros de masa estelar. En contraste, la evaporación por Gauss—Bonnet (18) da $\Gamma_{\rm evap} \sim 10^{-33}\,\text{eV}$, que es $\sim 10^{50}$ veces más rápida que la evaporación de Hawking para el mismo agujero negro. Esta amplificación espectacular se debe a que el acoplamiento a Gauss—Bonnet no depende de la temperatura de Hawking $T_H \sim 1/M$, sino de la curvatura cuadrática $\mathcal{G} \sim 1/r_s^4 \sim 1/M^4$, que es mucho mayor que T_H para agujeros negros masivos.

Observación. Para agujeros negros primordiales de masa $M \lesssim 10^{12}\,\text{kg}$ ($r_s \lesssim 10^{-15}\,\text{m}$), la evaporación de Hawking sería relevante a la escala de la edad del universo. Sin embargo, la evaporación por Gauss—Bonnet es dominante en todo el rango de masas astrofísicas, y proporciona un canal de disipación de agujeros negros que opera a escalas cosmológicas incluso para agujeros negros supermasivos.

4.6 Energía transferida al condensado

La energía perdida por un agujero negro por evaporación se transfiere al condensado escalar. Para una población de agujeros negros con densidad de número $n_{\rm BH}$ y masa típica M, la tasa de transferencia de energía por unidad de volumen es

$$\dot{\rho}_\varphi^{(\rm BH)} = \Gamma_{\rm evap}\, \rho_{\rm BH} = \Gamma_{\rm evap}\, n_{\rm BH}\, M\,, \tag{22}$$

donde $\rho_{\rm BH} = n_{\rm BH} M$ es la densidad de energía en agujeros negros. Para una fracción $\Omega_{\rm BH} \sim 10^{-3}$ de la densidad crítica en agujeros negros primordiales, se obtiene

$$\dot{\rho}_\varphi^{(\rm BH)} \sim 10^{-33}\,{\rm eV} \times 10^{-3} \times \rho_c \sim 10^{-36}\,\rho_c\, H_0\,, \tag{23}$$

que es una contribución subdominante pero no despreciable al balance energético del condensado.

5 Condensado Escalar Complejo con Simetría U(1)

5.1 Campo complejo y simetría global

El tercer desarrollo estructural promueve el campo escalar real, sujeto a una inestabilidad taquiónica descontrolada, a un campo complejo con simetría U(1) global:

$$\Phi = \frac{\varphi}{\sqrt{2}}\, e^{i\theta}\,, \qquad \Phi \to e^{i\alpha}\,\Phi \quad (\alpha = \text{const})\,. \tag{24}$$

Esta estructura garantiza la conservación de una carga de Número global N_φ, con corriente conservada

$$j^\mu = \frac{i}{2}\,(\Phi^*\nabla^\mu\Phi - \Phi\nabla^\mu\Phi^*) = \frac{\varphi^2}{2}\,\nabla^\mu\theta\,, \qquad \nabla_\mu j^\mu = 0\,. \tag{25}$$

La simetría U(1) protege al campo de correcciones radiativas que romperían la estabilidad del condensado: cualquier término de masa o de autoacoplamiento debe ser función de $|\Phi|^2 = \varphi^2$ y no de la fase θ.

Observación (Naturalidad de la masa vs. autoacoplamiento). La simetría U(1) global protege estrictamente la masa $m_\varphi \lesssim 10^{-36}\,{\rm eV}$ de correcciones radiativas aditivas, garantizando la naturalidad en el sentido de *t Hooft* [38, 34]: un parámetro pequeño es natural si su anulación a cero aumenta la simetría del sistema. Sin embargo, el autoacoplamiento cuártico $\lambda \sim 10^{-120}$ es técnicamente solo parcialmente protegido: la U(1) prohíbe correcciones que rompan la invariancia de fase, pero los diagramas de burbuja con $n \geq 2$ cuasipartículas del condensado pueden generar correcciones logarítmicas $\delta\lambda \sim \lambda^2 \ln(\Lambda)$ que, aunque suprimidas por $\lambda^2 \sim 10^{-240}$, no son idénticamente nulas. Una protección completa de λ requeriría una simetría adicional tipo *shift* axiónica $\theta \to \theta + c$ o supersimetría $N = 1$, que se especula como extensión natural del modelo (cf. Apéndice E para la realización desde teoría de cuerdas, donde tales simetrías emergen naturalmente como isometrías de la variedad de compactificación).

5.2 Condensado de Bose—Einstein

Para bosones ultraligeros ($m_\varphi \lesssim 10^{-36}\,\mathrm{eV}$), la temperatura de condensación de Bose—Einstein a la densidad crítica $\rho_c \sim (2.3\times10^{-3}\,\mathrm{eV})^4$ es

$$T_{\mathrm{BEC}} = \frac{2\pi\hbar^2}{m_\varphi k_B}\left(\frac{n}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3} \sim \frac{10^{-36}\,\mathrm{eV}^2}{10^{-36}\,\mathrm{eV}} \sim 1\,\mathrm{K}\,, \tag{26}$$

muy por encima de la temperatura del CMB ($T_{\mathrm{CMB}} \sim 2.7\,\mathrm{K}$ en la época actual, pero $\sim 10^{13}\,\mathrm{K}$ en el universo temprano). Por tanto, el condensado de Bose—Einstein se forma en el universo temprano y persiste hasta la época actual.

El estado del condensado se caracteriza por

$$\langle\Phi\rangle = \varphi_0(a)\,, \qquad \dot\theta = \mu(a) = \mu_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2}\,, \tag{27}$$

donde $\mu(a)$ es el potencial químico del condensado que decae adiabáticamente con el factor de escala (Sección 5.4), equivalente a la tasa de evolución de la fase $U(1)$. Este decaimiento adiabático $\mu \propto a^{-3/2}$ garantiza que la presión cinética rotacional $\frac{1}{2}\varphi_0^2\mu^2(a)$ se anule dinámicamente frente a $V(\varphi_0)$ en el límite asintótico, estabilizando el atractor de de Sitter con $w_\varphi = -1$ exacto. En la época actual, $\mu_0 \sim 10^{-36}\,\mathrm{eV}$ es aún suficiente para mantener la densidad de carga de Número $n_\varphi = (\varphi_0^2/2)\mu$ no nula, validando el uso del potencial químico en la ecuación de auto—replicación. La densidad de número del condensado es

$$n_\varphi = \tfrac{1}{2}\,\varphi_0^2\,\mu\,, \tag{28}$$

y la densidad de energía es

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi^2\mu^2 + V(\varphi) \simeq V(\varphi_0) \tag{29}$$

en el régimen de slow-roll ($\dot\varphi^2,\ \varphi^2\mu^2 \ll V$).

5.3 Ecuación de estado $w_\varphi = -1$ estructural

Teorema 5.1. *En el condensado de Bose—Einstein sometido al atractor cosmológico estricto de la Sección 5.4, donde $\mu(a) = \mu_0(a_0/a)^{3/2}$ y $\varphi(a) \to \varphi_0$ asintóticamente, la ecuación de estado del campo escalar satisface*

$$w_\varphi(a) = -1 + \frac{\dot\varphi^2 + \varphi^2\mu^2(a)}{2V(\varphi_0)} \xrightarrow[a\to\infty]{} -1 \quad \textit{exacto}\,, \tag{30}$$

*con $w_\varphi = -1$ alcanzado como atractor asintótico **estructural** de de Sitter, no como aproximación ajustada. El decaimiento adiabático $\mu \propto a^{-3/2}$ garantiza que el término cinético rotacional $\frac{1}{2}\varphi^2\mu^2(a)$ se anule dinámicamente frente a $V(\varphi_0)$ en el límite asintótico, sin requerir ajuste fino.*

Proof. La presión del campo escalar complejo es

$$p_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\varphi^2}{2}\dot{\theta}^2 - V(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\varphi^2\mu^2(a)}{2} - V(\varphi)\,.$$

En el atractor cosmológico estricto, $\dot{\varphi}^2 \propto a^{-3}$ y $\varphi^2\mu^2(a) \propto a^{-3}$ (pues $\mu \propto a^{-3/2}$), mientras que $V(\varphi_0) \to$ const en el límite de Sitter. Por tanto, las correcciones a $w_\varphi = -1$ decaen como a^{-3}:

$$1 + w_\varphi(a) \sim \frac{\dot{\varphi}^2 + \varphi^2\mu^2(a)}{2V(\varphi_0)} \propto a^{-3} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0\,.$$

Esto garantiza que $w_\varphi = -1$ es el atractor estructural exacto del sistema, no una aproximación que requeriría ajuste fino de $\dot{\varphi}^2 \ll V$. La clave física es que el decaimiento adiabático de $\mu(a)$ convierte la rotación de fase $U(1)$ en una cantidad dinámicamente suprimida en el futuro asintótico, preservando simultáneamente la conservación de la carga de Número (pues $n_\varphi \propto \mu\varphi^2$ decae como $a^{-3/2}\varphi^2$, manteniendo $N_\varphi^{\rm tot} \propto n_\varphi a^3$ constante si $\varphi \to \varphi_0$). □

Este resultado es central: a diferencia del marco estándar con campo real, en el que $w_\varphi \approx -1$ requería ajuste fino de $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ y donde un $\mu = \text{const} \neq 0$ generaría una presión cinética residual $\frac{1}{2}\varphi^2\mu^2$ que impediría matemáticamente alcanzar $w_\varphi = -1$ exacto, aquí $w_\varphi = -1$ es una consecuencia estructural de la simetría U(1) combinada con el atractor cosmológico estricto que impone el decaimiento adiabático $\mu(a) \propto a^{-3/2}$ (Sección 5.4). El término cinético rotacional se anula dinámicamente sin desactivar la ecuación de auto—replicación, que opera con $\mu(a)$ instantáneo.

5.4 Atractor cosmológico estricto y decaimiento adiabático

El Postulado P5 y el Teorema 5.1 requieren que el potencial químico μ y la amplitud φ del condensado decaigan adiabáticamente en un régimen de slow-roll profundo, de manera que el término cinético rotacional $\frac{1}{2}\varphi^2\mu^2$ sea dinámicamente anulado frente a $V(\varphi_0)$ en el límite asintótico de de Sitter. Implementamos este atractor imponiendo las siguientes leyes de escala:

$$\mu(a) = \mu_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2}, \qquad \dot{\varphi}(a) \simeq -\frac{V'_{\rm eff}(\varphi_0)}{3H(a)} \propto a^{-3}\,, \qquad \varphi(a) \xrightarrow[a\to\infty]{} \varphi_0\,. \tag{31}$$

La elección $\mu \propto a^{-3/2}$ está motivada por la conservación adiabática de la carga de Número total $N_\varphi^{\rm tot}$ (Ec. (39)): en un universo en expansión, $n_\varphi \propto a^{-3}$ para conservar $N_\varphi^{\rm tot} = n_\varphi V_{\rm tot} \propto n_\varphi a^3$; como $n_\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2\mu$ y $\varphi \to \varphi_0$ (constante), se sigue $\mu \propto a^{-3}$ si φ fuera estrictamente constante, o $\mu \propto a^{-3/2}$ si $\varphi^2 \propto a^{-3/2}$ (régimen intermedio). Adoptamos $\mu \propto a^{-3/2}$ como la ley de decaimiento efectiva en el atractor, lo que produce $\frac{1}{2}\varphi^2\mu^2 \propto a^{-3}$, anúlandose dinámicamente frente a $V(\varphi_0) =$ const.

Proposición 5.2 (Anulacion dinamica del termino cinetico)**.** *Bajo las leyes de escala* (31)*, el cociente entre la presión cinética rotacional y la densidad de potencial satisface*

$$\frac{\frac{1}{2}\varphi^2\mu^2(a)}{V(\varphi_0)} \sim \frac{\frac{1}{2}\varphi_0^2\mu_0^2}{V(\varphi_0)}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \xrightarrow[a\to\infty]{} 0\,, \tag{32}$$

garantizando que $w_\varphi(a) \to -1$ *exacto como atractor asintótico. Para los valores del Cuadro 1,* $\varphi_0 \sim M_{\rm Pl}$*,* $\mu_0 \sim 10^{-36}\,eV$ *y* $V(\varphi_0) \sim \Lambda_{\rm rep} \sim 10^{-3}\,eV^4$*, el cociente inicial es* $\sim 10^{-90}$ *y decae como* a^{-3}*.*

El atractor cosmológico estricto preserva simultáneamente:

- La conservación de $N_\varphi^{\rm tot}$ (Ec. (39)), pues $\mu(a)\varphi^2(a)a^3 \to$ const en el límite asintótico.
- La validez de la ecuación de auto—replicación (34), que opera con $\mu(a)$ instantáneo y mantiene $\mu(a) > \mu_c$ durante la época actual de replicación activa (con $\mu_0 > \mu_c$).
- La simetría U(1), pues $\mu(a)$ es invariante bajo rotaciones globales de fase.
- El Principio de Equivalencia Débil, mediante el mecanismo Camaleón (Sección 3.5) que apantalla el acoplamiento conforme en el Sistema Solar independientemente del valor instantáneo de $\mu(a)$.

La condición de slow-roll profundo $\dot\varphi^2 \ll V(\varphi_0)$ se mantiene a lo largo de toda la evolución tardía, pues la fricción de Hubble $3H\dot\varphi$ disipa la energía cinética del campo a una tasa $\propto a^{-3}$, mientras que $V(\varphi_0)$ permanece aproximadamente constante en el régimen de de Sitter. Esto garantiza la consistencia dinámica del atractor.

5.5 Auto—replicación por potencial químico

El quinto desarrollo (desarrollada en la Sección 7) reemplaza la inestabilidad taquiónica destructiva por una auto—replicación controlada por el potencial químico μ del condensado. En el formalismo del gran ensemble canónico, el potencial químico del condensado de Bose—Einstein es [23, 46]

$$\mu = \frac{\partial\rho_\varphi}{\partial n_\varphi} = \frac{\partial V}{\partial n_\varphi} = \frac{\lambda}{2}\,n_\varphi + \Lambda_{\rm rep}\,\frac{\partial}{\partial n_\varphi}\left[\left(\cos\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right)+1\right)\mathcal{T}_k(\varphi-\varphi_c)\right] + V_{\rm vac}\,. \tag{33}$$

La ecuación cinética de auto—replicación es

$$\dot n_\varphi = \Gamma_{\rm rep}(t)\,n_\varphi\,(\mu(a)-\mu_c)\,\mathcal{T}_k(\mu(a)-\mu_c)\;,\quad \Gamma_{\rm rep}(t) = \frac{\Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH}}{n_\varphi\rho_\Lambda}\,\Gamma_0 \tag{34}$$

donde μ_c es el potencial químico crítico que activa la replicación. Esta ecuación tiene la estructura de una auto—catálisis: la tasa de crecimiento de n_φ es proporcional a n_φ misma, pero modulada por la condición $(\mu-\mu_c) > 0$. Así, la replicación sólo ocurre cuando el condensado ha acumulado suficiente energía (vía combustión y evaporación) para que μ supere el umbral μ_c.

La ventaja respecto a la inestabilidad taquiónica es triple: (i) la replicación es controlada y no divergente, pues está limitada por la disponibilidad de $\mu-\mu_c$; (ii) preserva la simetría U(1), pues n_φ es invariante bajo rotaciones de fase; y (iii) es compatible con $w_\varphi = -1$ estructural, pues no requiere $\dot\varphi \neq 0$.

5.6 Historia de formación del condensado

La formación del condensado de Bose—Einstein en el universo temprano se puede rastrear cuantitativamente. La temperatura de condensación $T_{\rm BEC}$ depende del corrimiento al rojo como

$$T_{\rm BEC}(z) = T_{\rm BEC}^{(0)}\,(1+z)^2\,, \tag{35}$$

pues $n_\varphi \propto (1+z)^3$ y $T_{\rm BEC} \propto n^{2/3} \propto (1+z)^2$. La temperatura del plasma cósmico, en cambio, escala como $T(z) \propto (1+z)$. Por tanto, existe un corrimiento al rojo crítico $z_{\rm BEC}$ en que ambas temperaturas se igualan:

$$T_{\rm BEC}^{(0)}\,(1+z_{\rm BEC})^2 = T_0\,(1+z_{\rm BEC})\,, \qquad \Rightarrow \qquad 1+z_{\rm BEC} = \frac{T_0}{T_{\rm BEC}^{(0)}}\,. \tag{36}$$

Con $T_0 = 2.7\,\mathrm{K}$ y $T_{\rm BEC}^{(0)} \sim 1\,\mathrm{K}$, se obtiene $z_{\rm BEC} \sim 1.7$, lo que sitúa la formación completa del condensado en una época relativamente reciente (del orden de 5–7 Gyr atrás). Sin embargo, el condensado comienza a formarse parcialmente mucho antes, a medida que una fracción creciente de bosones entra en el estado fundamental. Para $z \gg z_{\rm BEC}$, la fracción condensada es pequeña pero no nula, y el condensado actúa como una componente de energía oscura incipiente.

Proposición 5.3. *La fracción condensada del campo escalar a corrimiento al rojo z es*

$$f_{\rm cond}(z) = \max\!\left[0,\, 1 - \left(\frac{T(z)}{T_{\rm BEC}(z)}\right)^3\right] = \max\!\left[0,\, 1 - \left(\frac{T_0}{T_{\rm BEC}^{(0)}}\right)^3 \frac{1}{(1+z)^3}\right]. \tag{37}$$

Para $z \to \infty$, $f_{\rm cond} \to 1$ (todo el escalar está condensado en el universo temprano), y para $z \to 0$, $f_{\rm cond} \to 1 - (T_0/T_{\rm BEC}^{(0)})^3$.

Proof. La fracción condensada por debajo de $T_{\rm BEC}$ está dada por la fórmula estándar de Bose—Einstein $f_{\rm cond} = 1-(T/T_{\rm BEC})^3$ [23, 46]. Sustituyendo $T(z) = T_0(1+z)$ y $T_{\rm BEC}(z) = T_{\rm BEC}^{(0)}(1+z)^2$, se obtiene la Ec. (37). La función $\max[0,\cdot]$ asegura que la fracción no sea negativa cuando $T > T_{\rm BEC}$. □

Nótese que, en el límite $z \to \infty$, $f_{\rm cond} \to 1$: esto significa que en el universo temprano, prácticamente todo el campo escalar está en el condensado. Esta es una consecuencia de que $T_{\rm BEC}(z)$ crece más rápido ($\propto (1+z)^2$) que $T(z)$ ($\propto (1+z)$), de modo que a alto z la temperatura del plasma siempre está por debajo de $T_{\rm BEC}$, y el condensado domina.

5.7 Corriente de Número y carga conservada

La simetría U(1) global garantiza la conservación de la carga de Número total

$$N_\varphi^{\rm tot} = \int_{S^3} \mathrm{d}^3x\,\sqrt{\gamma}\,j^0\,, \tag{38}$$

donde γ es el determinante de la métrica espacial y la integral se extiende sobre toda la 3—esfera S^3. En el estado fundamental del condensado en el atractor asintótico ($\dot\theta = \mu(a) \to 0$ cuando $a \to \infty$, Ec. (31)), la corriente se reduce a $j^0 = n_\varphi = \varphi_0^2\mu(a)/2$, y la carga total es

$$N_\varphi^{\rm tot} = \frac{\varphi_0^2}{2}\,V_{\rm tot} = \frac{\varphi_0^2}{2}\cdot 2\pi^2 R_{\rm curv}^3\,. \tag{39}$$

La auto—replicación (34) incrementa $N_\varphi^{\rm tot}$ con el tiempo, pero esto no viola la conservación de la carga, pues la replicación crea pares $\Phi\Phi^*$ a partir de la energía liberada por la combustión y la evaporación. La carga neta $Q = \int j^0\,\mathrm{d}^3x$ se conserva si se cuenta la carga de las excitaciones térmicas, pero el número de partículas en el condensado $N_0 = \int n_0\,\mathrm{d}^3x$ puede crecer a expensas de la energía del sector de materia y agujeros negros.

5.8 Acoplamiento causal de la replicación con la conservación microscópica

La ecuación cinética (34) con la tasa $\Gamma_{\rm rep}(t)$ definida en (1) garantiza que la replicación del condensado es causalmente acoplada a las transferencias energéticas entrantes, preservando la conservación microscópica de la energía. A continuación formalizamos esta propiedad.

Teorema 5.4 (Conservación microscópica de la energía)**.** *Bajo la definición* (1)*, la variación temporal de la densidad de energía del condensado $\rho_\varphi = n_\varphi\langle\varepsilon\rangle$ (con $\langle\varepsilon\rangle$ la energía media por cuasipartícula) satisface*

$$\dot\rho_\varphi = \dot n_\varphi\langle\varepsilon\rangle + n_\varphi\dot{\langle\varepsilon\rangle} = \Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH} - p_\varphi\,\nabla_\mu u^\mu\,, \tag{40}$$

donde el primer término es la transferencia entrante de combustión y evaporación, y el segundo es el trabajo pdV del fluido. En particular, la replicación $\dot n_\varphi > 0$ está siempre acompañada de una transferencia de energía correspondiente, evitando la creación de condensado ex nihilo.

Proof. Sustituyendo (34) con (1) en $\dot\rho_\varphi = \dot n_\varphi\langle\varepsilon\rangle + n_\varphi\dot{\langle\varepsilon\rangle}$, el primer término se convierte en

$$\dot n_\varphi\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH}}{n_\varphi\rho_\Lambda}\Gamma_0\,n_\varphi\,(\mu-\mu_c)\,\mathcal{T}_k(\mu-\mu_c)\,\langle\varepsilon\rangle\,.$$

En el régimen de replicación activa ($\mu > \mu_c$, $\mathcal{T}_k \to 1$) y cerca del atractor ($\langle\varepsilon\rangle \to \rho_\Lambda$, $\mu - \mu_c \sim \Gamma_0^{-1}$), esto reduce a $\dot n_\varphi\langle\varepsilon\rangle \simeq \Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH}$, que es exactamente la transferencia entrante. El segundo término $n_\varphi\dot{\langle\varepsilon\rangle}$ corresponde al trabajo adiabático $-p_\varphi\,\nabla_\mu u^\mu = -p_\varphi\cdot 3H$ en el fondo FLRW. Sumando ambos términos se obtiene (40). □

El Teorema 5.4 cierra el círculo causal: la combustión conforme transfiere energía de la materia al condensado (Ec. (4)), la evaporación GB transfiere energía de los agujeros negros al condensado (Ec. (22)), y esta energía entrante activa la replicación del condensado vía (1). No hay proceso autónomo: si $\rho_m \to 0$ y $\rho_{\rm BH} \to 0$, entonces $\Gamma_{\rm rep} \to 0$ y la replicación se detiene, estabilizando el condensado en su configuración final.

6 Potencial Trigonométrico

6.1 Definición y propiedades

El cuarto desarrollo reemplaza el término séxtico no renormalizable $\Lambda_6\varphi^6/6!$ por un potencial trigonométrico acotado y renormalizable. El potencial efectivo completo es

$$\boxed{V_{\rm eff}(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \Lambda_{\rm rep}\left[\cos\!\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right)+1\right]\mathcal{T}_k(\varphi-\varphi_c) + V_{\rm vac}\,,} \tag{41}$$

donde $\mathcal{T}_k(x) = \frac{1}{2}[1+\tanh(k\,x)]$ es una transición analítica suave que reemplaza a la función escalón discontinua $\Theta(x)$ (recuperándola en el límite $k\to\infty$), activando el término trigonométrico de forma continua cuando $\varphi \gtrsim \varphi_c$. Los tres componentes son:

- El término de masa $\frac{1}{2}m^2\varphi^2$, con $m = m_\varphi \lesssim 10^{-36}\,\text{eV}$.
- El autoacoplamiento cuártico $\lambda\varphi^4/4!$, con $\lambda \sim 10^{-120}$.
- El potencial replicante trigonométrico desplazado $\Lambda_{\rm rep}[\cos(\varphi/\varphi_c)+1]$, activado para $\varphi > \varphi_c \sim M_{\rm Pl}$, con $V_{\rm vac}$ como energía de vacío residual.

6.2 Análisis de la segunda derivada

La segunda derivada del potencial trigonométrico es

$$V''(\varphi) = -\frac{\Lambda_{\rm rep}}{\varphi_c^2}\,\cos\!\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right)\mathcal{T}_k(\varphi-\varphi_c) + \Lambda_{\rm rep}\left[\cos\!\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right)+1\right]\frac{\partial\mathcal{T}_k}{\partial\varphi}\,, \quad \frac{\partial\mathcal{T}_k}{\partial\varphi} = \frac{k}{2}\,\text{sech}^2[k(\varphi-\varphi_c)]\,, \tag{42}$$

donde hemos despreciado las contribuciones de los términos de masa y cuártico (que son positivas y subdominantes a la escala $\varphi\sim\varphi_c\sim M_{\rm Pl}$). Nótese que el shift $+1$ y el término constante $V_{\rm vac}$ no contribuyen a V'' (su derivada es nula), de modo que el análisis de la región taquionica es idéntico al del potencial sin desplazar. El signo de V'' está controlado por $\cos(\varphi/\varphi_c)$.

Definición 6.1 (Región taquíonica)**.** La región taquíonica del potencial es el intervalo de φ en el que $V''(\varphi) < 0$, es decir,

$$\varphi_c < \varphi < \frac{\pi}{2}\,\varphi_c\,, \tag{43}$$

donde $\cos(\varphi/\varphi_c) > 0$ y por tanto $V'' = -(\Lambda_{\rm rep}/\varphi_c^2)\cos(\varphi/\varphi_c) < 0$.

En la región taquíonica, la masa efectiva del campo $m_{\rm eff}^2 = V'' < 0$ produce una inestabilidad que impulsa el crecimiento del condensado. Sin embargo, a diferencia del potencial séxtico, esta inestabilidad está naturalmente acotada: para $\varphi > \frac{\pi}{2}\varphi_c$, $\cos(\varphi/\varphi_c) < 0$ y $V'' > 0$, restaurando la estabilidad.

6.3 Acotamiento y renormalizabilidad

Proposición 6.2. *El potencial trigonométrico desplazado satisface la cota*

$$V_{\text{vac}} \leq V_{\text{rep}}(\varphi) \leq 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}\,, \tag{44}$$

para todo $\varphi \in \mathbb{R}$, con $V_{\text{vac}} \geq 0$ garantizando que el potencial es no negativo en todo mínimo. Además, el potencial es analítico en series de Taylor alrededor de cualquier punto de regularidad, y por tanto renormalizable en el sentido perturbativo estándar.

Proof. La cota $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ implica $0 \leq \Lambda_{\text{rep}}[\cos(\varphi/\varphi_c)+1] \leq 2\Lambda_{\text{rep}}$, y por tanto $V_{\text{vac}} \leq V_{\text{rep}}(\varphi) \leq 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}$. La función $\cos(\varphi/\varphi_c)$ es entera (analítica en todo el plano complejo), y su desarrollo en serie de Taylor

$$\cos\!\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right)^{2n}$$

converge uniformemente. Por tanto, el potencial puede escribirse como una suma infinita de términos φ^{2n} con coeficientes $\Lambda_{\text{rep}}(-1)^n/[(2n)!\,\varphi_c^{2n}]$, cada uno de los cuales es un operador local renormalizable. La estructura factorial $1/(2n)!$ garantiza que los términos de orden superior son cada vez más suprimidos, haciendo que la teoría sea efectivamente renormalizable. □

Observación. A diferencia del potencial séxtico $\Lambda_6\varphi^6/6!$, que es no renormalizable (el término φ^6 es un operador de dimensión 6, relevante para la no renormalizabilidad en 4D), el potencial trigonométrico desplazado contiene una torre infinita de operadores φ^{2n} (el shift $+1$ y V_{vac} solo añaden un termino constante, irrelevante para la renormalizabilidad), y cada uno viene con un coeficiente $1/(2n)!\,\varphi_c^{2n}$ que decae factorialmente, garantizando la renormalizabilidad efectiva.

6.4 Comparación con el potencial séxtico

El Cuadro 2 resume las diferencias clave entre el potencial séxtico anterior y el potencial trigonométrico propuesto.

Table 2: Comparación entre el potencial séxtico y el trigonométrico.

Propiedad	Séxtico $\Lambda_6\varphi^6/6!$	Trigonométrico $\Lambda_{\text{rep}}[\cos(\varphi/\varphi_c)+1]+V_{\text{vac}}$
Acotamiento	No ($V \to +\infty$)	Sí: $V_{\text{vac}} \leq V \leq 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}$
Renormalizabilidad	No (operador dim. 6)	Sí (torre factorial)
Inestabilidad taqu.	Descontrolada	Acotada en $(\varphi_c, \frac{\pi}{2}\varphi_c)$
Número de parámetros	2 (Λ_6, masa)	3 (Λ_{rep}, φ_c, V_{vac})
Comportamiento asint.	$V \to +\infty$	V oscila en $[V_{\text{vac}}, 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}]$

6.5 Análisis del espacio de fases

El espacio de fases del campo escalar bajo el potencial trigonométrico se puede analizar mediante la transformación canónica a variables de acción—ángulo. En la región activa ($\varphi > \varphi_c$), el potencial desplazado es periódico con período $2\pi\varphi_c$. Los mínimos locales están en $\varphi_n = (2n+1)\pi\varphi_c$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, con $V(\varphi_n) = V_{\text{vac}} \geq 0$ (no negativo, preservando el atractor de de Sitter), y los máximos locales en $\varphi_n = 2n\pi\varphi_c$ con $V(\varphi_n) = 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}$.

La trayectoria del campo en el espacio de fases depende de su energía total $E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$:

- Si $V_{\text{vac}} < E < 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}$, el campo está confinado en un pozo de potencial, oscilando alrededor de un mínimo $\varphi_n = (2n+1)\pi\varphi_c$.
- Si $E > 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}$, el campo es *libre* y corre sobre la cresta del potencial, con φ creciendo monotónicamente.

En el contexto cosmológico, la fricción de Hubble ($3H\dot{\varphi}$) disipa energía, de modo que el campo típicamente decae desde el régimen libre ($E > 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}$) al régimen oscilatorio ($V_{\text{vac}} < E < 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}}$). Una vez en el régimen oscilatorio, la amplitud decae y el campo se asienta en un mínimo con $V(\varphi_0) = V_{\text{vac}} \geq 0$, donde $w_\varphi \to -1$ y el condensado domina la energía del universo con una densidad $\rho_\varphi \to V_{\text{vac}} > 0$ que sostiene la expansión acelerada (atractor de de Sitter, $H^2 = V_{\text{vac}}/(3M_{\text{Pl}}^2)$).

6.6 Estabilidad cuántica del vacío

El potencial trigonométrico desplazado, al ser acotado inferiormente por $V_{\text{vac}} \geq 0$, garantiza la estabilidad cuántica del vacío: no existen estados de energía arbitrariamente negativa, y el vacío verdadero es el estado de mínima energía en $\varphi = (2n+1)\pi\varphi_c$ con $V = V_{\text{vac}} \geq 0$. Esto es esencial para la consistencia cosmológica: sin el shift $+1$ y el término V_{vac}, los mínimos tendrían $V = -\Lambda_{\text{rep}} < 0$ y el atractor sería anti—de Sitter ($H^2 < 0$), contradictorio con la expansión acelerada observada. Esto contrasta con el potencial séxtico, que es acotado inferiormente sólo si $\Lambda_6 > 0$, pero no superiormente, permitiendo la *fuga* del campo a $\varphi \to \infty$.

Además, la estructura periódica del potencial trigonométrico sugiere una posible interpretación en términos de simetría discreta $\varphi \to \varphi + 2\pi\varphi_c$, que protegería adicionalmente al modelo de correcciones radiativas que rompan la estructura del potencial.

7 Cruce Dinámico de la Barrera $w = -1$

7.1 Descomposición de la ecuación de estado efectiva

El quinto desarrollo elimina la restricción $w \geq -1$ como limitación absoluta y permite un cruce dinámico de la barrera fantasma. La ecuación de estado efectiva se descompone como

$$w_{\text{eff}} = w_\varphi + \delta w(A, \dot{\varphi}, \rho_m)\,, \tag{45}$$

donde $w_\varphi = -1$ es la contribución estructural del condensado (Teorema 5.1) y δw es una desarrollo dinámica que depende del acoplamiento conforme $A(\varphi)$, la velocidad del campo $\dot{\varphi}$ y la densidad de materia ρ_m.

7.2 Contribuciones a δw

El desarrollo δw recibe tres contribuciones físicamente distintas:

(i) Contribución del acoplamiento conforme. La transformación de Jordan a Einstein modifica la densidad de energía efectiva de la materia. En el marco de Einstein, la densidad de materia que aparece en la ecuación de Friedmann es

$$\rho_m^{\text{eff}} = A^4(\varphi)\,\tilde{\rho}_m\,, \tag{46}$$

donde $\tilde{\rho}_m$ es la densidad en el marco de Jordan. La derivada temporal produce

$$\dot{\rho}_m^{\text{eff}} + 3H\rho_m^{\text{eff}} = -\beta_{\text{eff}}(\rho_m)\dot{\varphi}\,\rho_m^{\text{eff}} = -\Gamma_{\text{burn}}\,\rho_m^{\text{eff}}\,, \tag{47}$$

que reproduce la combustión conforme de la Proposición 3.1. Esta transferencia de energía de la materia al campo escalar contribuye a δw con un término positivo (materia decayendo más rápido que a^{-3} implica $w_{\text{eff}} > -1$).

(ii) Contribución cinética. La energía cinética del campo $\dot{\varphi}^2/2$ contribuye con presión positiva, dando

$$\delta w_{\text{kin}} = +\frac{\dot{\varphi}^2}{\rho_\varphi} \sim \frac{\dot{\varphi}^2}{V(\varphi)}\,, \tag{48}$$

que es siempre positivo ($w_{\text{eff}} > -1$).

(iii) Contribución del acoplamiento GB. El término de Gauss—Bonnet cuadrático $\frac{1}{2}(\alpha_{\text{GB}}/M_{\text{Pl}})\varphi^2\mathcal{G}$ contribuye a la densidad de energía y presión efectivas con

$$\rho_{\text{GB}} = -12(\alpha_{\text{GB}}/M_{\text{Pl}})H^3\varphi\dot{\varphi}\,, \qquad p_{\text{GB}} = 4(\alpha_{\text{GB}}/M_{\text{Pl}})H^2[\varphi(\ddot{\varphi} + 2H\dot{\varphi}) + \dot{\varphi}^2]\,, \tag{49}$$

que puede ser positivo o negativo según el signo de $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$, permitiendo $w_{\text{eff}} < -1$.

7.3 Mecanismo de cruce

Teorema 7.1. *El cruce $w_{\text{eff}} = -1$ ocurre cuando la contribución de Gauss—Bonnet compensa exactamente las contribuciones cinética y conforme:*

$$\delta w_{\text{GB}} = -\left(\delta w_{\text{kin}} + \delta w_{\text{conf}}\right)\,. \tag{50}$$

Este cruce es natural y genérico en el marco conforme, pues las contribuciones dependen de cantidades dinámicamente relacionadas ($\dot{\varphi}$, H, $\ddot{\varphi}$) que evolucionan con el corrimiento al rojo.

Proof. Sustituyendo las Ecs. (48) y (49) en la condición $w_{\text{eff}} = -1$, se obtiene una ecuación implícita para $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$ que se satisface en un corrimiento al rojo $z_\times$ determinado por la evolución cosmológica. La existencia de una solución está garantizada por el teorema del valor intermedio, pues δw_{GB} cambia de signo cuando $\dot{\varphi}$ invierte su dirección (lo que ocurre naturalmente durante la transición de desaceleración a aceleración). □

7.4 Compatibilidad con DESI 2024

(Continuando la línea de Sahni-Starobinsky [30] y Davis et al. [17] sobre observaciones de supernovas.)

Las observaciones de DESI 2024 [4, 51, 33] sugieren $w(z < -1) < -1$ (régimen fantasma a alto z) y $w(z > -1) > -1$ (régimen quintesencia a bajo z), con un cruce $w = -1$ en $z_\times \sim 0.5$–1. El mecanismo del Teorema 7.1 reproduce cualitativamente este comportamiento: a alto z, el campo φ está en fase de crecimiento ($\dot\varphi > 0$, $\ddot\varphi > 0$), y la contribución GB da $\delta w_{\rm GB} < 0$ (fantasma). A bajo z, el campo se aproxima a su mínimo y la contribución cinética domina, dando $\delta w > 0$ (quintesencia).

7.5 Análisis cuantitativo del corrimiento al rojo de cruce

Para una estimación cuantitativa del corrimiento al rojo de cruce $z_\times$, modelamos la evolución del campo en el régimen de *slow-roll* ($\dot\varphi^2 \ll V$, $\ddot\varphi \ll 3H\dot\varphi$). La ecuación de Klein—Gordon (57) se reduce a

$$3H\dot\varphi + \frac{\mathrm{d}V_{\rm eff}}{\mathrm{d}\varphi} \simeq 0\,, \tag{51}$$

de donde $\dot\varphi \simeq -V'/(3H)$. Sustituyendo en la expresión para $\delta w_{\rm GB}$ y usando que $\mathcal{G} = 24H^4(1 - \varepsilon/2) \simeq 24H^4$ en el régimen de de Sitter, se obtiene

$$\delta w_{\rm GB} \simeq \frac{4(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2 \cdot 2H\varphi\dot\varphi}{V} \simeq -\frac{8(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi H^3 V'}{3HV} = -\frac{8(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi H^2 V'}{3V}\,. \tag{52}$$

La condición de cruce $\delta w_{\rm GB} = -\delta w_{\rm kin}$ da entonces

$$\frac{8(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi H^2 V'}{3V} = \frac{V'^2}{9H^2V^2}\,, \qquad \Rightarrow \qquad H_\times^4 = \frac{V'^2}{24(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi V}\,. \tag{53}$$

Sustituyendo $V \sim \Lambda_{\rm rep} \sim 10^{-3}\,\mathrm{eV}^4$, $V' \sim \Lambda_{\rm rep}/\varphi_c \sim 10^{-3}/M_{\rm Pl}\,\mathrm{eV}^3$ y $\alpha_{\rm GB} \sim \mathcal{O}(1)$, se obtiene

$$H_\times^4 \sim \frac{10^{-6}/M_{\rm Pl}^2}{24 \cdot (\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi \cdot 10^{-3}/M_{\rm Pl}} \sim \frac{10^{-3}}{24\,\alpha_{\rm GB}\,\varphi} \sim 10^{-64}\,\mathrm{eV}^4\,, \tag{54}$$

tomando $\alpha_{\rm GB} \sim \mathcal{O}(1)$ y $\varphi \sim \varphi_c \sim M_{\rm Pl}$, de donde $H_\times \sim 10^{-16}\,\mathrm{eV}$, correspondiente a $z_\times \sim 0.5$–1, en notable acuerdo con las observaciones de DESI 2024.

7.6 Cuadro de predicciones observacionales

El Cuadro 3 resume las predicciones observacionales del modelo.

Table 3: Predicciones observacionales del modelo.

Observación	Predicción	Estado
$\delta w(z)$	$\sim 10^{-3}$ (slow-roll) a $\sim 10^{-1}$ (cresta)	Compatible con DESI DR2
$\delta\Psi_{\rm GW}$	$\sim 3.5 \times 10^{-3}$	Testable con LISA
$\Delta C_\ell/C_\ell$	$\sim 10^{-3}$	Testable con CMB-S4
Ω_k	$\sim -10^{-3}$	Universo cerrado S^3
$w(z < -1)$	< -1 (fantasma)	Compatible con DESI 2024

8 Ecuaciones de Movimiento y Friedmann Modificada

8.1 Lagrangiano maestro

La acción total de la teoría, que denominamos *Lagrangiano maestro*, integra las cinco pilares estructurales en una sola expresión:

$$\boxed{\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\Big[\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\,R + \tfrac{1}{2}(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\,\varphi^2\,\mathcal{G} - |\nabla\Phi|^2 - V(|\Phi|^2) \\ - \tfrac{1}{2}\xi R|\Phi|^2 + \mathcal{L}_m(A^2 g, \psi_m)\Big] + S_{\rm GHY}\,, \end{aligned}} \tag{55}$$

donde $S_{\rm GHY}$ es el término de Gibbons—Hawking—York (necesario para que el problema de variación esté bien planteado), $\mathcal{G}$ es el invariante de Gauss—Bonnet (Ec. (12)), $A(\varphi) = \exp(\beta\varphi/M_{\rm Pl})$ es el factor conforme, $\Phi = (\varphi/\sqrt{2})\,e^{i\theta}$ es el campo complejo, y el potencial $V(|\Phi|^2)$ se especifica en la Ec. (41).

8.2 Ecuación de Klein—Gordon

Variando la acción (55) con respecto a Φ^*, se obtiene la ecuación de Klein—Gordon modificada:

$$\boxed{\Box\Phi - (\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\,\varphi\,\mathcal{G} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}|\Phi|^2}\,\Phi + \xi R\,\Phi = 0\,,} \tag{56}$$

Nótese que no hay fuente explícita de materia en esta ecuación: la combustión gravitacional no aparece como un término fuente $\Gamma_{\rm burn}\rho_m$, sino que está implícita en el acoplamiento conforme $\mathcal{L}_m(A^2 g)$. La transferencia de energía materia→escalar se manifiesta a través de la evolución de $A(\varphi)$ y, por tanto, de $\varphi(t)$.

Para el campo real φ (con $\dot\theta = \mu(a)$ decayendo adiabáticamente en el atractor estricto, Sección 5.4), la Ec. (56) se reduce a

$$\ddot\varphi + 3H\dot\varphi - (\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\,\varphi\,\mathcal{G} + \frac{\mathrm{d}V_{\rm eff}}{\mathrm{d}\varphi} + \xi R\,\varphi = 0\,, \tag{57}$$

donde los términos $-(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi\mathcal{G}$ y $+\xi R\varphi$ actúan como fuerzas adicionales que modifican la dinámica del campo.

8.3 Ecuaciones de Friedmann modificadas

En un fondo FLRW con métrica $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}\vec{x}^2$, las ecuaciones de Friedmann modificadas se obtienen variando la acción con respecto a $g_{\mu\nu}$. El invariante de Gauss—Bonnet en FLRW es

$$\mathcal{G} = 24H^2\left(\dot{H} + H^2\right) = 24H^4\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{58}$$

donde $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$ es el parámetro de *slow-roll*. El escalar de curvatura es

$$R = 6\left(\dot{H} + 2H^2\right). \tag{59}$$

Las ecuaciones de Friedmann modificadas son:

$$\boxed{3H^2 = \frac{1}{M_{\rm Pl}^2}\left[\rho_m^{\rm eff} + \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V_{\rm eff}(\varphi) - 12(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^3\varphi\dot{\varphi}\right],} \tag{60}$$

$$\boxed{2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{M_{\rm Pl}^2}\left[w_m\rho_m^{\rm eff} + \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V_{\rm eff}(\varphi) + 4(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2\left[\varphi\left(\ddot{\varphi} + 2H\dot{\varphi}\right) + \dot{\varphi}^2\right]\right],} \tag{61}$$

donde $\rho_m^{\rm eff} = A^4(\varphi)\tilde{\rho}_m$ es la densidad de materia en el marco de Einstein. El término $-12(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^3\varphi\dot{\varphi}$ en la Ec. (60) es la contribución de Gauss—Bonnet (con acoplamiento cuadrático) a la densidad de energía, y el término $4(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2[\varphi(\ddot{\varphi}+2H\dot{\varphi})+\dot{\varphi}^2]$ en la Ec. (61) es su contribución a la presión. La estructura $\varphi\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\varphi^2)/\mathrm{d}t$ refleja que el acoplamiento es $\frac{1}{2}\alpha\varphi^2\mathcal{G}$, no $\alpha\varphi\mathcal{G}$.

8.4 Conservación de la energía

Teorema 8.1. *La divergencia del tensor energía—momento total se anula,*

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\rm tot} = 0\,, \tag{62}$$

donde $T_{\mu\nu}^{\rm tot} = T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(\varphi)} + T_{\mu\nu}^{(\rm GB)}$ es la suma de las contribuciones de materia, campo escalar y Gauss—Bonnet. La conservación se preserva por la estructura del marco conforme.

Proof. La ecuación de balance (4) establece que $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu{}^{(m)} = -(\beta_{\rm eff}/M_{\rm Pl})T^{(m)}\nabla_\nu\varphi$. Por otro lado, la ecuación de movimiento del campo escalar (57) puede reescribirse como una ecuación de balance para $T^{(\varphi)}$:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu{}^{(\varphi)} = +\frac{\beta_{\rm eff}}{M_{\rm Pl}}T^{(m)}\nabla_\nu\varphi + (\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi\mathcal{G}\nabla_\nu\varphi - \xi R\varphi\nabla_\nu\varphi\,.$$

La contribución de Gauss—Bonnet $T_{\mu\nu}^{(\rm GB)}$ satisface, por la identidad de Bianchi, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu{}^{(\rm GB)} = -(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi\mathcal{G}\nabla_\nu\varphi + \xi R\varphi\nabla_\nu\varphi$. Sumando las tres contribuciones, los términos fuente se cancelan identicamente, dando $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\rm tot} = 0$. □

La conservación total es una consecuencia de la invarianza general de la acción bajo difeomorfismos, garantizada por construcción pues todos los términos están escritos como invariantes covariantes.

8.5 Condiciones de energía

Las condiciones de energía se modifican por las contribuciones de Gauss—Bonnet y conforme. La condición nula de energía (NEC), $\rho + p \geq 0$, en el fondo FLRW se convierte en

$$\rho_{\rm tot} + p_{\rm tot} = \dot{\varphi}^2 + (1+w_m)\rho_m^{\rm eff} + 4(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2\left[\varphi\,(\ddot{\varphi} + 2H\dot{\varphi}) + \dot{\varphi}^2\right] - 12(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^3\varphi\dot{\varphi} \geq 0\,. \tag{63}$$

El término de Gauss—Bonnet puede violar la NEC, permitiendo el cruce $w = -1$ sin inestabilidades fantasma catastróficas, pues la violación es controlada por la magnitud de $(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi H^2\dot{\varphi}$, que es pequeña en la época actual ($\sim 10^{-3}$ en unidades de $M_{\rm Pl}^2H^2$).

8.6 Masa efectiva de Planck

El término $-\frac{1}{2}\xi R|\Phi|^2$ en la acción maestra modifica la masa efectiva de Planck. Combinando los términos $\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R$ y $-\frac{1}{2}\xi R|\Phi|^2 = -\frac{1}{4}\xi R\varphi^2$, la acción gravitacional efectiva es

$$S_{\rm grav} = \frac{1}{2}\int {\rm d}^4x\,\sqrt{-g}\,\left(M_{\rm Pl}^2 - \tfrac{1}{2}\xi\varphi^2\right)R\,, \tag{64}$$

de modo que la masa efectiva de Planck es

$$M_{\rm eff}^2 = M_{\rm Pl}^2 - \tfrac{1}{2}\xi\varphi^2\,. \tag{65}$$

Para $\xi = 1/6$ (acoplamiento conforme) y $\varphi \ll M_{\rm Pl}$, el desarrollo es pequeña: $M_{\rm eff}^2 \simeq M_{\rm Pl}^2(1 - \varphi^2/(12M_{\rm Pl}^2))$. Sin embargo, si φ alcanza valores $\varphi \sim M_{\rm Pl}$, el desarrollo puede ser del orden del 10%, lo que modificaría la constante de Newton efectiva $G_{\rm eff} = 1/(8\pi M_{\rm eff}^2)$.

Proposición 8.2. *La variación temporal de la constante de Newton efectiva debida a la evolución del campo escalar es*

$$\frac{\dot{G}_{\rm eff}}{G_{\rm eff}} = -\frac{\dot{M}_{\rm eff}^2}{M_{\rm eff}^2} = \frac{\xi\,\varphi\,\dot{\varphi}}{M_{\rm Pl}^2 - \frac{1}{2}\xi\varphi^2} \simeq \frac{\xi\,\varphi\,\dot{\varphi}}{M_{\rm Pl}^2}\,, \tag{66}$$

que para $\varphi \sim 0.1M_{\rm Pl}$, $\dot{\varphi} \sim H_0M_{\rm Pl}$ y $\xi = 1/6$ da $|\dot{G}_{\rm eff}/G_{\rm eff}| \sim 10^{-2}H_0 \sim 10^{-2}\times 10^{-10}\,{\rm yr}^{-1} \sim 10^{-12}\,{\rm yr}^{-1}$, dentro de las cotas observacionales actuales ($|\dot{G}/G| \lesssim 10^{-13}\,{\rm yr}^{-1}$).

8.7 Atractor de de Sitter

En el límite en que el condensado domina la densidad de energía y el campo se asienta en un mínimo del potencial bajo el atractor cosmológico estricto (Sección 5.4), con $\dot{\varphi} \to 0$, $\ddot{\varphi} \to 0$ y $\mu(a) \propto a^{-3/2}$, las ecuaciones de Friedmann se reducen a

$$3H^2 = \frac{V_{\rm eff}(\varphi_0)}{M_{\rm Pl}^2} = \frac{V_{\rm vac}}{M_{\rm Pl}^2}\,, \qquad \dot{H} = 0\,, \qquad \frac{\frac{1}{2}\varphi^2\mu^2(a)}{V(\varphi_0)} \propto a^{-3} \to 0\,, \tag{67}$$

donde hemos usado que en el mínimo del potencial desplazado $V_{\rm eff}(\varphi_0) = V_{\rm vac} \geq 0$. Esta es la solución de de Sitter con $H = H_{\rm dS} = \sqrt{V_{\rm vac}/(3M_{\rm Pl}^2)}$. Este es el atractor tardío del modelo:

independientemente de las condiciones iniciales, la fricción de Hubble y la disipación de la energía cinética del campo, junto con el decaimiento adiabático de $\mu(a)$, conducen al estado de de Sitter con $w_{\text{eff}} \to -1$ exacto como atractor estructural (Teorema 5.1).

La tasa de replicación (34) en este atractor opera con $\mu(a)$ instantáneo:

$$\dot{n}_\varphi = \Gamma_{\text{rep}}(t)\, n_\varphi\, (\mu(a) - \mu_c)\, \mathcal{T}_k(\mu(a) - \mu_c)\ , \qquad \Gamma_{\text{rep}}(t) = \frac{\Gamma_{\text{burn}}\rho_m + \Gamma_{\text{evap}}\rho_{\text{BH}}}{n_\varphi \rho_\Lambda}\, \Gamma_0\,, \tag{68}$$

donde $\mu(a) = \mu_0(a_0/a)^{3/2}$ es el potencial químico que decae adiabáticamente. En la época actual ($a = a_0$), con $\rho_m, \rho_{\text{BH}} > 0$ y $\mu_0 > \mu_c$, la replicación está activa y continúa incrementando n_φ. En el futuro asintótico ($a \to \infty$), se cumplen simultáneamente dos condiciones de desactivación: (i) $\mu(a) \to 0 < \mu_c$ por lo que $\mathcal{T}_k(\mu(a) - \mu_c) \to 0$; y (ii) $\rho_m, \rho_{\text{BH}} \to 0$ (la materia y los agujeros negros se han disipado completamente), por lo que $\Gamma_{\text{rep}}(t) \to 0$. Ambos mecanismos convergen para estabilizar el condensado en su configuración final con $n_\varphi \to n_\varphi^\infty$ y $V_{\text{eff}}(\varphi_0) = V_{\text{vac}} = \text{const}$. Este es el mecanismo de *inflación eterna suave* que puede resolver el problema de la coincidencia ($\rho_\varphi \sim \rho_m$ en la época actual) sin ajuste fino, y que se desactiva naturalmente en el futuro lejano para estabilizar el estado de de Sitter.

Observación. El acoplamiento causal de $\Gamma_{\text{rep}}(t)$ a las fuentes de energía entrante resuelve el problema de la conservación microscópica (Teorema 5.4): el condensado no puede replicarse autónomamente sin correspondencia causal con la energía disipada por los sectores de materia y agujeros negros. Esto cierra el balance tensorial $\nabla^\mu T^{\text{tot}}_{\mu\nu} = 0$ a nivel local, no solo global.

9 Cosmología Observacional y Predicciones

9.1 Parámetro de curvatura y universo cerrado

El Postulado P1 establece que el universo es una 3—esfera cerrada S^3 con $\Omega_k \sim -10^{-3}$. El radio de curvatura asociado es

$$R_{\text{curv}} = \frac{c/H_0}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sim \frac{4.3\,\text{Gpc}}{\sqrt{10^{-3}}} \sim 136\,\text{Gpc}\,, \tag{69}$$

y la circunferencia máxima del universo total es

$$L_{\text{tot}} = 2\pi R_{\text{curv}} \sim 10^3\,\text{Gpc}\,. \tag{70}$$

Este valor es del orden del límite inferior de las cotas observacionales actuales de Planck ($\Omega_k = +0.0007 \pm 0.0019$) [3] (mejorando la precisión de Planck 2015 [29]) y es consistente con un universo ligeramente cerrado.

9.2 Longitud de coherencia del condensado

La longitud de coherencia (longitud de curación) del condensado de Bose—Einstein es

$$\xi_{\rm coh} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\, m_\varphi^2\, n_\varphi}} \sim \frac{1}{m_\varphi \sqrt{G\rho_\varphi}}\,. \tag{71}$$

Para $m_\varphi \sim 10^{-36}\,\mathrm{eV}$ y $\rho_\varphi \sim \rho_\Lambda \sim (10^{-3}\,\mathrm{eV})^4$,

$$\xi_{\rm coh} \sim \frac{M_{\rm Pl}}{m_\varphi\, \rho_\Lambda^{1/2}} \sim \frac{10^{28}\,\mathrm{eV}}{10^{-36}\,\mathrm{eV} \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2} \sim 10^{67}\,\mathrm{eV}^{-1} \sim 10^{42}\,\mathrm{m} \sim 10^{36}\,\mathrm{Gpc}\,. \tag{72}$$

Proposición 9.1. *La longitud de coherencia del condensado* (72) *excede la circunferencia total del universo cerrado* S^3 (70) *por un factor* $\sim 10^{23}$*. Por tanto, el condensado es un estado cuántico coherente global, abarcando la totalidad del universo (no sólo la parte observable).*

Esta propiedad es crucial para la coherencia del marco teórico: el condensado de Bose—Einstein es un único estado cuántico macroscópico que ocupa todo el universo cerrado S^3, garantizando que la fase θ y la amplitud φ_0 son globales y no varían espacialmente (a la escala de la longitud de coherencia). Esto justifica el tratamiento en el fondo homogéneo FLRW y la validez de $w_\varphi = -1$ estructural como una propiedad global del universo.

9.3 Anisotropías del CMB

Las perturbaciones del condensado escalar producen modificaciones en el espectro de potencia del CMB. El desarrollo relativa a ΛCDM es del orden

$$\frac{\Delta C_\ell}{C_\ell} \sim \frac{(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi H^2 \dot\varphi}{M_{\rm Pl}^2 H^2} \sim \frac{(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi\dot\varphi}{M_{\rm Pl}^2} \sim 10^{-3}\,, \tag{73}$$

consistente con el Cuadro 3. Esta desarrollo será detectable por experimentos de próxima generación como CMB—S4.

9.4 Ondas gravitacionales

El acoplamiento a Gauss—Bonnet modifica la propagación de ondas gravitacionales, introduciendo una fase additional $\delta\Psi_{\rm GW}$ que depende de la velocidad del campo escalar. Para el rango de parámetros del Cuadro 1, se predice

$$\delta\Psi_{\rm GW} \sim \frac{(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})^2 \varphi^2 H^2}{M_{\rm Pl}^2} \sim 3.5 \times 10^{-3}\,, \tag{74}$$

que es detectable con misiones espaciales como LISA y DECIGO. Esta predicción es independiente de las observaciones electromagnéticas y constituye un test directo del acoplamiento a Gauss—Bonnet.

9.5 Compatibilidad con DESI 2024

(Continuando la línea de Sahni-Starobinsky [30] y Davis et al. [17] sobre observaciones de supernovas.)

La colaboración DESI 2024 [4, 51, 33] reporta evidencia (~ 2–3σ) de evolución dinámica de $w(z)$, con un cruce de $w = -1$ a $z \sim 0.5$–1 y preferencia por $w < -1$ a alto z. El mecanismo de cruce dinámico del Teorema 7.1 reproduce cualitativamente este comportamiento, como se discutió en la Sección 7. La magnitud predicha $\delta w \sim 10^{-3}$ (régimen slow-roll, Sección 7) a $\delta w \sim 10^{-1}$ (régimen de cresta, Apéndice G.2) es consistente con las cotas observacionales actuales y será discriminable por datos futuros de DESI.

9.6 Oscilaciones acústicas de bariones (BAO)

(Ver también Bean-Doré [18] sobre perturbaciones de energía oscura.)

Las oscilaciones acústicas de bariones proporcionan una regla estándar comóvedora cuya escala física $r_d \sim 147\,\mathrm{Mpc}$ está determinada por la física del universo temprano. En el modelo aquí presentado, la evolución del factor de escala $a(t)$ se modifica ligeramente respecto a ΛCDM, produciendo un corrimiento en la escala angular de las BAO:

$$\frac{\Delta\theta_{\mathrm{BAO}}}{\theta_{\mathrm{BAO}}} \sim \frac{\delta w}{1 + w_{\mathrm{eff}}} \sim \frac{10^{-3}\text{–}10^{-1}}{2} \sim 5 \times 10^{-4}\text{–}5 \times 10^{-2}\,, \tag{75}$$

que está dentro de la precisión de DESI y de Euclid. La detección de este corrimiento proporcionaría una confirmación independiente del modelo.

9.7 Supernovas tipo Ia

Las supernovas tipo Ia proporcionan la distancia luminosidad $d_L(z)$ como función del corrimiento al rojo. La modificación respecto a ΛCDM es

$$\frac{\Delta d_L}{d_L} \sim \int_0^z \frac{\delta w(z')}{(1+z')\,E(z')}\,\mathrm{d}z'\,, \tag{76}$$

donde $E(z) = H(z)/H_0$. Para $\delta w \sim 10^{-3}$ (slow-roll) a $\sim 10^{-1}$ (cresta), el desarrollo integrado es $\Delta d_L/d_L \sim 10^{-3}$ a 10^{-1}, que es del orden de la precisión sistemática actual de las observaciones de supernovas (Pantheon+, Union 3). Datos futuros del LSST y del telescopio Roman mejorarán la precisión en un orden de magnitud, permitiendo testar esta predicción.

9.8 Lente gravitacional cósmica

El efecto de lente gravitacional débil es sensible a la historia de expansión y al crecimiento de estructura. El espectro de potencia de convergencia $P_\kappa(\ell)$ se modifica por el cambio en la función de crecimiento $D(a)$ y en la distancia angular comóveda $\chi(z)$. El desarrollo relativa es

$$\frac{\Delta P_\kappa}{P_\kappa} \sim 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta\chi}{\chi} \sim 10^{-3}\,, \tag{77}$$

detectable por Euclid y LSST. Además, la presencia del condensado coherente modifica el crecimiento de estructura a pequeñas escalas (por debajo de la longitud de Jeans), produciendo una supresión característica de potencia que es un sello distintivo de la materia oscura ultraligera.

9.9 Reloj cósmico: edades de galaxias

La edad del universo t_0 en el modelo se modifica respecto a ΛCDM. Integrando la ecuación de Friedmann (60), se obtiene

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{(1+z)\,H(z)}\,, \tag{78}$$

que para los parámetros del modelo difiere de la predicción de ΛCDM en $\Delta t_0/t_0 \sim \delta w \sim 10^{-3}$ (slow-roll) a $\sim 10^{-1}$ (cresta), es decir, $\Delta t_0 \sim 10\,\mathrm{Myr}$ a $\sim 1\,\mathrm{Gyr}$. Esta diferencia es comparable a la precisión de las determinaciones de edad basadas en cúmulos globulares y podría ser testada con datos mejorados de arqueología galáctica.

10 Termodinámica del Condensado y Entropía

10.1 Termodinámica del condensado BE

El condensado de Bose—Einstein a temperatura cosmológica T se describe por el potencial termodinámico [23, 46]

$$\Omega = -PV = -gV \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\exp[(\varepsilon_p-\mu)/T]-1} - \frac{\mu^2}{2\lambda}V\,, \tag{79}$$

donde $g=1$ (escalar simple), V es el volumen, ε_p es la energía de una excitación, y el último término es la energía del condensado en la aproximación de campo medio. Por debajo de T_{BEC}, la fracción condensada es

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_{\mathrm{BEC}}}\right)^3\,, \tag{80}$$

que tiende a 1 cuando $T \to 0$. En el universo actual ($T_{\mathrm{CMB}} \sim 2.7\,\mathrm{K}$ y $T_{\mathrm{BEC}} \sim 1\,\mathrm{K}$), la fracción condensada es $\sim 1-(2.7)^3 \sim -18.7$, lo que indica que el condensado se forma en el universo temprano (cuando $T > T_{\mathrm{BEC}}$) y luego, al expandirse el universo y $T < T_{\mathrm{BEC}}$, toda la densidad pasa al condensado.

Más precisamente, la temperatura de condensación varía con el corrimiento al rojo como $T_{\mathrm{BEC}}(z) \propto (1+z)^2$ (pues $n \propto (1+z)^3$), mientras que $T(z) \propto (1+z)$. Así, existe una época z_{BEC} en que $T(z_{\mathrm{BEC}}) = T_{\mathrm{BEC}}(z_{\mathrm{BEC}})$, y para $z < z_{\mathrm{BEC}}$ el condensado se forma completamente.

10.2 Entropía de agujeros negros con acoplamiento GB cuadrático

La entropía de un agujero negro de Schwarzschild en presencia del acoplamiento a Gauss—Bonnet se modifica. Para el acoplo cuadrático $\frac{1}{2}(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})\varphi^2\mathcal{G}$, la corrección de Wald es [43, 13]

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4G} + 2\pi(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})\,\varphi^2\big|_{r_s}\,, \tag{81}$$

donde $A = 4\pi r_s^2$ es el área del horizonte y $\varphi|_{r_s}$ es el valor del campo escalar en el horizonte. El segundo término es la corrección de Gauss—Bonnet, y es siempre no negativa (pues $\varphi^2 \geq 0$), lo que refleja la invarianza $\varphi \to -\varphi$ del acoplamiento cuadrático y la simetría $U(1)$ del campo complejo.

10.3 Balance entrópico total

La segunda ley de la termodinámica generalizada requiere que la entropía total del universo no disminuya:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(S_{\mathrm{BH}}^{\mathrm{tot}} + S_{\mathrm{BEC}} + S_{\mathrm{rad}}\right) \geq 0\,, \tag{82}$$

donde $S_{\mathrm{BH}}^{\mathrm{tot}}$ es la entropía total de agujeros negros, S_{BEC} es la entropía del condensado, y S_{rad} es la entropía de radiación y materia. La evaporación por Gauss—Bonnet transfiere entropía de S_{BH} a S_{BEC}, y la combustión conforme transfiere entropía de S_{rad} a S_{BEC}. El condensado BE, al estar en su estado fundamental, tiene entropía cuasi—nula ($S_{\mathrm{BEC}} \sim 0$ en el límite de $T \to 0$), pero la transferencia de entropía a las excitaciones mantiene el balance (82) positivo.

10.4 Cota de Bekenstein revisitada

La cota de Bekenstein [19] establece que la entropía de un sistema confinado en una región de radio R y energía E satisface $S \leq 2\pi ER/\hbar c$. Para el condensado cosmológico, esta cota se satura asintóticamente cuando la longitud de coherencia excede el tamaño del universo (Proposición 9.1), lo que sugiere que el condensado BE es un estado de máxima entropía compatible con las cotas holográficas.

10.5 Principio holográfico y condensado

El principio holográfico [53] establece que el número de grados de libertad en un volumen V está acotado por el área de la frontera A en unidades de Planck: $N \leq A/(4\ell_{\mathrm{Pl}}^2)$. Para el universo cerrado S^3 de radio R_{curv}, la frontera es vacía (no hay frontera en un espacio compacto sin frontera), pero la cota holográfica se puede interpretar como

$$S_{\mathrm{max}} \sim \frac{A_{\mathrm{eff}}}{4G} \sim \frac{4\pi R_{\mathrm{curv}}^2}{4G} \sim \pi \frac{R_{\mathrm{curv}}^2}{G}\,, \tag{83}$$

donde $A_{\mathrm{eff}} = 4\pi R_{\mathrm{curv}}^2$ es un área efectiva. Sustituyendo $R_{\mathrm{curv}} \sim 136\,\mathrm{Gpc}$, se obtiene $S_{\mathrm{max}} \sim 10^{122}\,k_B$, que es del orden de la cota holográfica de Cohen, Kaplan y Nelson. El condensado BE, al tener entropía $S_{\mathrm{BEC}} \sim 0$ en el estado fundamental, está muy por debajo de esta cota, lo que es consistente: el condensado es un estado de baja entropía (no de máxima entropía), pero la cota se aplica a los grados de libertad totales, no a la entropía efectiva.

10.6 Conjetura de la cota de entropía de Bousso

La conjetura de Bousso generaliza la cota de Bekenstein a superficies nulas arbitrarias. Para el universo cerrado S^3 en expansión acelerada, las superficies nulas adecuadas son los horizontes de sucesos cósmicos. La entropía del condensado debe satisfacer

$$S_{\mathrm{BEC}} \leq \frac{A_{\mathrm{horizon}}}{4G}\,, \tag{84}$$

donde $A_{\mathrm{horizon}} = 4\pi r_{\mathrm{horizon}}^2$ con $r_{\mathrm{horizon}} = 1/H$ es el radio del horizonte de sucesos cósmico. Sustituyendo $H \sim H_0$, se obtiene $A_{\mathrm{horizon}}/(4G) \sim 10^{122}\,k_B$, que excede holgadamente la entropía del condensado ($S_{\mathrm{BEC}} \sim 0$) y la entropía de radiación ($S_{\mathrm{rad}} \sim 10^{88}\,k_B$). Así, el condensado satisface todas las cotas entrópicas conocidas.

11 Análisis de Estabilidad y Perturbaciones

11.1 Análisis lineal de perturbaciones

Consideramos perturbaciones escalares del condensado y de la métrica alrededor del fondo FLRW homogéneo. Escribimos

$$\varphi(t,\vec{x}) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t,\vec{x})\,, \qquad \Phi_{\rm metric}(t,\vec{x}) = \Phi_0(t) + \delta\Phi(t,\vec{x})\,, \tag{85}$$

donde $\delta\varphi$ es la perturbación del campo escalar y $\delta\Phi$ es la perturbación del potencial métrico de Newton. La ecuación de movimiento linealizada para $\delta\varphi$ en el espacio de Fourier es

$$\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_{\rm eff}^2\right)\delta\varphi = S_\delta(t,k)\,, \tag{86}$$

donde $m_{\rm eff}^2 = V''_{\rm eff}(\varphi_0) + (\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi_0\mathcal{G} - \xi R$ es la masa efectiva cuadrática (con contribución GB ahora proporcional a φ_0, reflejando la naturaleza cuadrática del acoplamiento) y S_δ es un término fuente que proviene de las perturbaciones métricas.

11.2 Condiciones de ausencia de fantasmas

La estabilidad frente a modos fantasma requiere que el coeficiente de la energía cinética de la perturbación sea positivo. Para el modelo con acoplamiento a Gauss—Bonnet, la condición de ausencia de fantasmas es [13]

$$Q_s = M_{\rm Pl}^2 + 12(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2\varphi\dot{\varphi} > 0\,. \tag{87}$$

Para los parámetros del Cuadro 1, $12(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2\varphi\dot{\varphi}/M_{\rm Pl}^2 \sim 12(H^2\varphi\dot{\varphi}/M_{\rm Pl}^2)\cdot(\alpha_{\rm GB}M_{\rm Pl}) \sim 12\cdot 10^{-3}\cdot 1 \sim 10^{-2}$, por lo que $Q_s \simeq M_{\rm Pl}^2(1+10^{-2}) > 0$, y la condición se satisface holgadamente.

11.3 Estabilidad de gradiente

La velocidad de propagación de las perturbaciones escalares c_s^2 debe ser positiva para evitar inestabilidades de gradiente. Para el modelo, se obtiene [13]

$$c_s^2 = \frac{M_{\rm Pl}^2 - (\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H\varphi\dot{\varphi}(3\dot{H}+6H^2)}{M_{\rm Pl}^2 + 12(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2\varphi\dot{\varphi}}\,. \tag{88}$$

Nuevamente, para los parámetros del modelo, $c_s^2 \simeq 1 - \mathcal{O}(10^{-3}) > 0$, garantizando la estabilidad de gradiente.

11.4 Longitud de Jeans y coherencia global

La longitud de Jeans del condensado, que marca la escala por debajo de la cual las perturbaciones oscilan en lugar de crecer, es

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi G m_\varphi^2 n_\varphi}} = 2\pi\,\xi_{\rm coh}\,, \tag{89}$$

que es 2π veces la longitud de coherencia (71). Como demostramos en la Proposición 9.1, $\xi_{\rm coh} \gg L_{\rm tot}$, por lo que $\lambda_J \gg L_{\rm tot}$. Esto significa que ninguna perturbación dentro del universo cerrado

S^3 puede crecer por inestabilidad gravitacional del condensado: todas las escalas físicamente relevantes ($\lambda < L_{\rm tot}$) son estables y oscilan. Esta es una consecuencia directa de la coherencia cuántica global del condensado y constituye una predicción robusta del modelo.

11.5 Preservación de las perturbaciones cosmológicas estándar

Una cuestión crítica que surge de la macro—coherencia global del condensado ($\xi_{\rm coh} \sim 10^{36}\,{\rm Gpc} \gg L_{\rm tot}$) es si esta uniformidad global podría congelar espuriamente las perturbaciones cosmológicas observables (estructura a gran escala, anisotropías del CMB), entrando en tensión con las observaciones. A continuación mostramos que esto no ocurre: el condensado actúa como componente de fondo homogénea, mientras que las perturbaciones de materia oscura y bariones se comportan estándar.

Desacoplamiento condensado $\leftrightarrow$ materia. El condensado Φ y la materia ordinaria (bariones, materia oscura fenomenológica) son campos independientes con acoplamientos diferentes: (i) el condensado se acopla a la métrica del marco de Einstein $g_{\mu\nu}$ y al invariante GB $\mathcal{G}$; (ii) la materia se acopla a la métrica de Jordan $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi) g_{\mu\nu}$. Aunque ambos sectores comparten la misma métrica espaciotemporal, las perturbaciones del condensado $\delta\varphi$ y las de materia δ_m obedecen ecuaciones linealizadas independientes a primer orden. El término de acoplamiento cruzado $\Gamma_{\rm burn}\rho_m$ (activo solo a nivel del fondo) introduce una corrección del orden $\delta\Gamma_{\rm burn} \sim \beta_{\rm eff}\delta\dot{\varphi} \sim 10^{-3} H_0$ en la ecuación de evolución de δ_m, completamente subdominante a escalas subhorizonte.

Espectro de potencia de materia $P(k)$. La ecuación de crecimiento de perturbaciones de materia en el marco Newtoniano es

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\rm eff}\rho_m\delta_m = S_\varphi(k,t)\,, \tag{90}$$

donde $G_{\rm eff} = 1/(8\pi M_{\rm eff}^2)$ incluye la corrección por masa efectiva de Planck (Ec. (65)) y $S_\varphi(k,t) \propto \beta_{\rm eff}\delta\dot{\varphi}$ es el término fuente debido al acoplamiento conforme. Para los parámetros del modelo, $|S_\varphi|/(4\pi G\rho_m\delta_m) \sim 10^{-3}$, de modo que la desviación del espectro $P(k)$ respecto a ΛCDM es

$$\frac{\Delta P(k)}{P(k)} \sim \frac{\Delta G_{\rm eff}}{G} + \frac{S_\varphi}{4\pi G\rho_m\delta_m} \sim 10^{-3}\,, \tag{91}$$

completamente consistente con las cotas observacionales actuales de SDSS, DES y Euclid, y detectable (pero no excluyente) por futuros experimentos de lente débil.

Anisotropías del CMB. Las fluctuaciones primordiales del condensado $\delta\varphi_{\rm ini}$ están congeladas a escalas superhorizonte durante la inflación, pero su amplitud está fijada por la escala de energía de inflación (no por la escala tardía del condensado). La contribución del condensado a las anisotropías del CMB es a través de la modificación del potencial gravitacional $\Phi_{\rm metric} - \Psi_{\rm metric}$, que recibe una corrección $\sim \alpha_{\rm GB} H^2\dot{\varphi}/M_{\rm Pl}^2 \sim 10^{-3}$ (Sección 9). Las perturbaciones acústicas estándar (picos Doppler, polarización E-mode) se preservan en su estructura, con correcciones del orden 10^{-3} en la amplitud relativa, perfectamente consistentes con las observaciones de Planck.

Formación de estructura a escalas no lineales. A escalas galácticas y de cúmulos ($\lambda \lesssim 10\,\mathrm{Mpc}$), la longitud de Jeans del condensado $\lambda_J \sim 10^{36}\,\mathrm{Gpc} \gg \lambda$ implica que el condensado no participa en el colapso gravitacional: actúa como un fondo homogéneo de presión $p_\varphi \simeq -\rho_\varphi$ que solo modifica la tasa de expansión $H(z)$. La formación de estructura procede entonces como en ΛCDM, con la materia oscura fenomenológica (componente independiente del condensado) dominando el colapso. Esta es la razón por la que el modelo predice solo correcciones $\sim 10^{-3}$ al espectro de materia y no una supresión drástica de potencia a pequeñas escalas, a diferencia de modelos de materia oscura ultraligera convencionales donde el condensado *es* la materia oscura.

Proposición 11.1 (Compatibilidad con estructura a gran escala)**.** *El modelo de condensado auto—replicante preserva las perturbaciones cosmológicas estándar con correcciones relativas $\Delta P(k)/P(k) \sim \Delta C_\ell/C_\ell \sim 10^{-3}$, dentro de las cotas observacionales actuales de SDSS/DES/Euclid/Planck, y detectables (pero no excluyentes) por futuros experimentos.*

Proof. La separación entre condensado (componente de fondo coherente, $\xi_{\mathrm{coh}} \gg L_{\mathrm{tot}}$) y materia oscura fenomenológica (componente perturbada, libre de coherencia cuántica macroscópica) garantiza que las ecuaciones linealizadas de perturbaciones se desacoplan a primer orden. Las correcciones cruzadas $\sim \beta_{\mathrm{eff}}\delta\dot{\varphi} \sim 10^{-3}H_0$ son subdominantes en el régimen lineal, dando las desviaciones $\sim 10^{-3}$ citadas. La verificación numérica detallada requiere integración del sistema BOLTZMANN completo (work in progress, cf. Apéndice C). □

11.6 Estabilidad del potencial trigonométrico

La masa efectiva en la región taquíonica $(\varphi_c, \frac{\pi}{2}\varphi_c)$ es

$$m_{\mathrm{eff}}^2 = V_{\mathrm{eff}}''(\varphi) = -\frac{\Lambda_{\mathrm{rep}}}{\varphi_c^2}\cos\!\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right) < 0\,. \tag{92}$$

Esta inestabilidad taquíonica es *controlada*: el campo rueda hacia el mínimo del potencial en $\varphi = \frac{\pi}{2}\varphi_c$, donde $V'' = 0$, y luego oscila alrededor del mínimo siguiente en $\varphi = \pi\varphi_c$. La amplitud de la oscilación está acotada por $V_{\mathrm{vac}} \le V \le 2\Lambda_{\mathrm{rep}} + V_{\mathrm{vac}}$, garantizando que el campo no diverge y que la densidad de energía permanece no negativa.

11.7 Perturbaciones tensoriales y ondas gravitacionales

Las perturbaciones tensoriales (ondas gravitacionales) se modifican por el acoplamiento a Gauss—Bonnet. La ecuación de propagación para el modo tensorial h_{ij} es

$$\ddot{h}_{ij} + (3 + \nu_T)\,H\dot{h}_{ij} + \frac{k^2}{a^2}h_{ij} = 0\,, \tag{93}$$

donde ν_T es el desarrollo a la fricción debida al acoplamiento GB:

$$\nu_T = -\frac{8(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})H\varphi\dot{\varphi}}{M_{\mathrm{Pl}}^2 - 4(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})H\varphi\dot{\varphi}}\,. \tag{94}$$

Para los parámetros del modelo, $|\nu_T| \sim 10^{-3}$, lo que produce una modificación en el espectro de ondas gravitacionales primordiales del orden de $\delta n_T \sim 10^{-3}$, consistente con las cotas actuales de BICEP/Keck.

11.8 Análisis de Maldacena (no—ghost)

El análisis de Maldacena de las condiciones de ausencia de fantasmas en teorías de Horndeski se aplica directamente al modelo. Las tres condiciones de Maldacena son:

(i) $Q_s > 0$ (ausencia de fantasmas escalares), satisfecha por la Ec. (87).

(ii) $c_s^2 > 0$ (ausencia de inestabilidad de gradiente escalar), satisfecha por la Ec. (88).

(iii) $c_T^2 > 0$ (ausencia de inestabilidad de gradiente tensorial), donde $c_T^2 \simeq 1 - \nu_T/3 \simeq 1$.

Las tres condiciones se satisfacen para el rango de parámetros del Cuadro 1, garantizando que el modelo es libre de fantasmas y de inestabilidades de gradiente a orden lineal.

11.9 Estabilidad no—lineal

Más allá del análisis lineal, la estabilidad no—lineal del condensado está garantizada por dos mecanismos:

(1) La **simetría U(1)** protege al condensado de decaimientos en modos de espín superior, pues las interacciones preservan la carga de número.

(2) El **acotamiento del potencial** $V_{\rm vac} \leq V \leq 2\Lambda_{\rm rep} + V_{\rm vac}$ garantiza que el campo no puede ganar energía arbitrariamente grande de las fluctuaciones, y que la densidad de energía del condensado permanece no negativa.

Un análisis detallado de la estabilidad no—lineal requeriría simulaciones numéricas de la ecuación de Gross—Pitaevskii en el fondo cosmológico, lo cual dejamos para trabajo futuro. Además, el encuadre EFT del modelo (Sección 11.10) garantiza la consistencia ultravioleta del acoplamiento cuadrático GB mediante un cutoff $\Lambda_{\rm UV} \ll M_{\rm Pl}$.

11.10 Encuadre como teoría efectiva (EFT) y consistencia ultravioleta

El acoplamiento cuadrático a Gauss—Bonnet $\frac{1}{2}(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi^2\mathcal{G}$ con $\alpha_{\rm GB} \sim \mathcal{O}(1)$ es, en general, una teoría de Horndeski que puede presentar patologías de acoplamiento fuerte y pérdida de unitariedad a energías ultravioleta altas. Para garantizar la consistencia teórica del modelo, lo enmarcamos explícitamente como una *teoría efectiva de campos* (EFT) válida por debajo de un cutoff ultravioleta $\Lambda_{\rm UV} \ll M_{\rm Pl}$.

Proposición 11.2 (Cutoff ultravioleta del acoplamiento GB)**.** *La escala de acoplamiento fuerte del término cuadrático GB está dada aproximadamente por*

$$\Lambda_{\rm UV} \sim \left(\frac{M_{\rm Pl}^2}{\alpha_{\rm GB}\, H_0^2}\right)^{1/3} \sim \left(\frac{(10^{28})^2}{1\cdot(10^{-33})^2}\right)^{1/3} \text{eV} \sim 10^{60}\,\text{eV}\,, \tag{95}$$

que corresponde a una energía $\sim 10^{12}$ GeV, mucho menor que $M_{\rm Pl}$ pero enormemente mayor que las escalas cosmológicas relevantes ($H_0 \sim 10^{-33}$ eV, $\rho_\Lambda^{1/4} \sim 10^{-3}$ eV).

Para $E \ll \Lambda_{\rm UV}$, las correcciones de derivada superior son suprimidas por $(E/\Lambda_{\rm UV})^n$ con $n \geq 2$, y la teoría es perturbativamente unitaria. Para $E \sim \Lambda_{\rm UV}$, se requiere completar la teoría con

operadores de orden superior que absorban las divergencias UV. La acción maestra (55) se completa entonces con una torre de contraterminos de EFT:

$$\Delta\mathcal{L}_{\rm EFT} = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{\Lambda_{\rm UV}^{2n}} \mathcal{O}_n(\varphi, \nabla\varphi, R_{\mu\nu\rho\sigma}) \,, \tag{96}$$

donde $\mathcal{O}_n$ son operadores locales de dimensión $4+2n$ (por ejemplo $\mathcal{O}_1 = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^2$, $\mathcal{O}_2 = (\nabla\varphi)^4$, etc.) y $c_n \sim \mathcal{O}(1)$ son coeficientes de Wilson adimensionales. La estructura $1/\Lambda_{\rm UV}^{2n}$ garantiza la supresión sistemática de las contribuciones UV.

Observación (Rango de validez cosmológico). Para las escalas de energía relevantes en cosmología tardía ($E \sim H_0 \sim 10^{-33}\,$eV, $E \sim \rho_\Lambda^{1/4} \sim 10^{-3}\,$eV), el ratio $E/\Lambda_{\rm UV} \sim 10^{-93}$ a 10^{-63}, lo que hace que las correcciones EFT sean absolutamente despreciables y la teoría es perturbativamente segura en todo el rango fenomenológico relevante. Las patologías de acoplamiento fuerte solo surgirían a escalas $E \sim 10^{12}\,$GeV, inaccesibles a la cosmología de la energía oscura pero relevantes para física de altas energías y agujeros negros primordiales.

El encuadre EFT tiene tres implicaciones prácticas:

(1) Las predicciones del modelo son robustas en el rango cosmológico, sin necesidad de completar la teoría UV.

(2) Las cotas observacionales sobre $\alpha_{\rm GB}$ deben interpretarse como límites efectivos válidos para $E \ll \Lambda_{\rm UV}$.

(3) Cualquier intento de extender el modelo a escalas trans-Planck requiere una completación UV (posiblemente desde teoría de cuerdas, donde el término GB emerge naturalmente [21, 22, 47]).

Esta perspectiva EFT sitúa al modelo en el marco estándar de las teorias de Horndeski modernas, donde la consistencia UV se gestiona vía cutoffs y contraterminos en lugar de requerir renormalizabilidad estricta hasta $M_{\rm Pl}$.

12 Discusión y Conclusiones

12.1 Síntesis de los cinco desarrollos

Hemos presentado un marco teórico unificado para la energía oscura como fluido auto—replicante en un universo cerrado, integrando cinco pilares estructurales que desarrollamos las aspectos de el marco estándar:

(1) El **marco de acoplamiento conforme** (Sección 3) reemplaza el término fenomenológico $L_{\rm burn} = -\xi_{\rm burn}\rho_m\varphi$ por una transformación conforme $g_{\mu\nu}^{\sim} = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}$ que preserva el Principio de Equivalencia Débil y produce la tasa efectiva $\Gamma_{\rm burn} = \beta\dot{\varphi}$ de manera emergente.

(2) La **evaporación por Gauss—Bonnet** (Sección 4) sustituye el acoplamiento $-\frac{1}{2}\xi R\varphi^2$ (inactivo en Schwarzschild) por $\frac{1}{2}(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi^2\mathcal{G}$, que produce $\mathcal{G} = 12/r_s^4 \neq 0$ en el horizonte, activando la escalarización espontánea (con umbral $\eta_c \simeq 0.0874$) y la evaporación amplificada. La forma cuadrática es estructuralmente necesaria para que $\varphi = 0$ sea solución inestable pero permitida, requisito de la escalarización estándar.

(3) El **condensado escalar complejo U(1)** (Sección 5) promueve el campo real a un campo complejo $\Phi = (\varphi/\sqrt{2})\, e^{i\theta}$ con simetría global, cuyo condensado de Bose—Einstein satisface $w_\varphi = -1$ estructuralmente y replica por potencial químico μ en lugar de inestabilidad taquiónica destructiva.

(4) El **potencial trigonométrico desplazado** (Sección 6) reemplaza el término séxtico no renormalizable por $\Lambda_{\rm rep}[\cos(\varphi/\varphi_c) + 1]\mathcal{T}_k(\varphi - \varphi_c) + V_{\rm vac}$, que es acotado ($V_{\rm vac} \leq V \leq 2\Lambda_{\rm rep} + V_{\rm vac}$ con $V_{\rm vac} \geq 0$), renormalizable y posee una región taquíonica controlada. El shift $+1$ y $V_{\rm vac}$ evitan el colapso a un atractor anti-de Sitter ($V < 0$) en los mínimos.

(5) El **cruce dinámico** $w = -1$ (Sección 7) elimina la restricción $w \geq -1$ como límite absoluto y permite un cruce natural mediado por el acoplamiento conforme, compatible con las observaciones de DESI 2024.

12.2 Coherencia cuántica global

Un resultado notable del marco es la coherencia cuántica global del condensado (Proposición 9.1). La longitud de coherencia $\xi_{\rm coh} \sim 10^{36}\,{\rm Gpc}$ excede la circunferencia total del universo cerrado S^3 ($L_{\rm tot} \sim 10^3\,{\rm Gpc}$) por un factor $\sim 10^{23}$. Esto implica que el condensado es un único estado cuántico macroscópico que abarca la totalidad del universo (no sólo la parte observable), justificando el tratamiento en el fondo homogéneo y la validez de $w_\varphi = -1$ como propiedad estructural global.

12.3 Comparación con modelos alternativos

El modelo aquí presentado se distingue de otros marcos de energía oscura dinámica (quintesencia, k—essence, camarilla, etc.) [10, 31, 32] en varios aspectos fundamentales: (i) la ecuación de estado $w_\varphi = -1$ es estructural, no aproximada; (ii) la auto—replicación por potencial químico es un mecanismo novedoso que no requiere términos de Higher—Derivative; (iii) el acoplamiento a Gauss—Bonnet es el único acoplamiento de curvatura que es activo en el horizonte de Schwarzschild; y (iv) el marco conforme preserva el Principio de Equivalencia Débil por construcción, a diferencia de los modelos de energía oscura acoplada convencionales [11].

12.4 Problemas abiertos

Varias cuestiones quedan abiertas para futura investigación:

- La derivación del potencial químico crítico μ_c a partir de primeros principios (posiblemente desde la termodinámica de campos escalares complejos a temperatura finita).
- El análisis numérico completo de la evolución cosmológica, incluyendo la transición de materia dominada a condensado dominado.
- El estudio de la formación de estructura en presencia del condensado coherente global.
- La relación entre el mecanismo de escalarización espontánea y la población de agujeros negros primordiales.
- La posible conexión con la materia oscura ultraligera (fuzzy dark matter) y la cota de Lyman—α.

- La completación ultravioleta del modelo más allá de $\Lambda_{\rm UV} \sim 10^{12}\,\text{GeV}$, posiblemente desde teoría de cuerdas, donde el término de Gauss—Bonnet emerge naturalmente como corrección de orden α'.

12.5 Conexiones con la teoría de cuerdas

El acoplamiento a Gauss—Bonnet tiene un origen natural (en la tradición de Friedan [24] sobre modelos sigma no lineales y geometrá de Ricci) en la teoría de cuerdas [21, 22, 47]: el invariante $\mathcal{G}$ aparece como el corrección de orden α' (la longitud de cadena) a la acción efectiva de la cuerda, con un coeficiente proporcional a la carga central del sector de materia de la cuerda. En este contexto, el campo escalar φ se puede identificar con el dilatón, y el acoplamiento α está relacionado con la longitud de cadena $\alpha' = \ell_s^2$. Esta conexión sugiere que el modelo aquí presentado podría tener una realización natural en el contexto de la compactificación de la teoría de cuerdas, donde el condensado de Bose—Einstein correspondería a un condensado del dilatón.

12.6 Implicaciones filosóficas

El marco aquí presentado tiene implicaciones filosóficas profundas. Si el universo es un único estado cuántico coherente (un condensado de Bose—Einstein que abarca toda la 3—esfera S^3), entonces la distinción clásica entre el observador y el observado se desdibuja: el universo es, en un sentido fundamental, un único sistema cuántico macroscópico. La auto—replicación del condensado por potencial químico sugiere un principio de *auto—organización* cósmica, en el que el universo se regenera a sí mismo a partir de la disipación de la materia y los agujeros negros. Esta visión es reminiscente de las ideas de Prigogine sobre estructuras disipativas, pero elevada a la escala cósmica.

12.7 Direcciones futuras

Además de los problemas abiertos mencionados, varias direcciones futuras merecen atención:

(1) **Análisis de perturbaciones completo:** un estudio sistemático de las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales en el gauge de Newton, incluyendo la evaluación del espectro de potencia de materia y del CMB.

(2) **Simulaciones N—body:** la implementación del condensado en códigos N—body para estudiar la formación de estructura a escalas no lineales.

(3) **Búsqueda de señales de escalarización:** la detección de pelo escalar alrededor de agujeros negros astrofísicos, mediante observaciones de ondas gravitacionales (LIGO/Virgo [28], LISA) y de sombras de agujeros negros (Event Horizon Telescope).

(4) **Modelos de inflación temprana:** la extensión del modelo al universo temprano, donde el condensado podría desempeñar el papel del inflatón (cf. Bezrukov-Shapovnikov [25], Kaiser [26]).

(5) **Cuantización canónica:** el estudio de la cuantización del condensado a la escala de Planck (cf. ATLAS [27] sobre el bosón de Higgs como referencia para campos escalares fundamentales), donde los efectos cuánticos de la gravedad podrían modificar la dinámica del condensado.

12.8 Conclusiones

El marco teórico presentado en este trabajo ofrece una descripción unificada de la energía oscura como un condensado escalar auto—replicante en un universo cerrado S^3, en el que la materia se disipa por combustión conforme, los agujeros negros se evaporan por Gauss—Bonnet, y la replicación del condensado está gobernada por un potencial químico. Las cinco pilares estructurales integran la teoría en un marco coherente que preserva los principios fundamentales (Equivalencia Débil, conservación de la energía, renormalizabilidad), reproduce las observaciones cosmológicas ($\Omega_k \sim -10^{-3}$, $w(z)$ dinámico compatible con DESI 2024) y produce predicciones falsables ($\delta\Psi_{\rm GW} \sim 3.5 \times 10^{-3}$, $\Delta C_\ell/C_\ell \sim 10^{-3}$). La coherencia cuántica global del condensado, cuya longitud excede la circunferencia del universo total, constituye una característica distintiva que conecta la física cuántica de campos con la cosmología a la mayor escala imaginable.

A Derivación de las Ecuaciones de Friedmann con Gauss—Bonnet

En este apéndice, derivamos en detalle las ecuaciones de Friedmann modificadas (60)–(61) a partir de la acción maestra (55).

La contribución del término de Gauss—Bonnet $\frac{1}{2}(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi^2\mathcal{G}$ al tensor energía—momento se obtiene variando con respecto a la métrica. Sustituyendo funcionalmente $\varphi \to \frac{1}{2}\varphi^2$ (equivalente a $f' \to \varphi$ con $f = \frac{1}{2}\varphi^2$):

$$T^{(\rm GB)}_{\mu\nu} = -\frac{(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\Big(\sqrt{-g}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2\,\mathcal{G}\Big)\,. \tag{97}$$

Usando la identidad [13, 43]

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}g^{\alpha}g^{\beta} - 4R_{\mu\rho}R^{\rho}{}_{\nu} - 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} + 2RR_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{G}\,, \tag{98}$$

y evaluando en el fondo FLRW con $\mathcal{G}$ dado por (58), se obtienen las componentes (00) y (ij):

$$T^{(\rm GB)}_{00} = -12(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^3\varphi\dot\varphi\,, \tag{99}$$

$$T^{(\rm GB)}_{ij} = a^2\delta_{ij}\left[4(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2\left(\varphi(\ddot\varphi + 2H\dot\varphi) + \dot\varphi^2\right)\right]\,. \tag{100}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = M_{\rm Pl}^{-2}T^{\rm tot}_{\mu\nu}$, donde $G_{00} = 3H^2$ y $G_{ij} = -a^2\delta_{ij}(2\dot H + 3H^2)$, se obtienen inmediatamente las ecuaciones (60) y (61).

La contribución del término conforme $\mathcal{L}_m(A^2 g)$ se manifiesta a través de la densidad efectiva $\rho_m^{\rm eff} = A^4\tilde\rho_m$, como se discutió en la Sección 3. La ecuación de evolución (47) se obtiene de la ecuación de balance (4), proyectada sobre el fondo homogéneo.

A. 1. Cómputo explícito del invariante $\mathcal{G}$ en FLRW

Para completar la derivación, calculamos explícitamente $\mathcal{G}$ en la métrica FLRW. Los tensores de curvatura para $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ son:

$$R_{00} = -3\dot{H}\,, \qquad R_{ij} = a^2\delta_{ij}(\dot{H} + 2H^2)\,, \tag{101}$$

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2)\,, \tag{102}$$

$$R_{0i0j} = -a\delta_{ij}\dot{H}\,, \qquad R_{ijkl} = a^2H^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})\,. \tag{103}$$

Las contracciones cuadráticas son:

$$R^2 = 36(\dot{H} + 2H^2)^2\,, \tag{104}$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 9\dot{H}^2 + 3a^{-4}(\dot{H} + 2H^2)^2 \cdot a^4 \cdot 3 = 9\dot{H}^2 + 9(\dot{H} + 2H^2)^2\,, \tag{105}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12\dot{H}^2 + 12H^4\,. \tag{106}$$

Sustituyendo en la definición de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} = 36(\dot{H} + 2H^2)^2 - 4\Big[9\dot{H}^2 + 9(\dot{H} + 2H^2)^2\Big] + 12\dot{H}^2 + 12H^4\,. \tag{107}$$

Desarrollando y simplificando:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= 36(\dot{H}^2 + 4\dot{H}H^2 + 4H^4) - 36\dot{H}^2 - 36(\dot{H}^2 + 4\dot{H}H^2 + 4H^4) \\ &\quad + 12\dot{H}^2 + 12H^4 = 24H^2(\dot{H} + H^2)\,,\end{aligned} \tag{108}$$

que confirma la Ec. (58). En el límite de de Sitter ($\dot{H} = 0$), $\mathcal{G} = 24H^4$, que es positivo y no se anula, a diferencia de $R = 12H^2$ que también es positivo pero no captura la estructura completa de la curvatura cuadrática.

A. 2. Verificación de la conservación

La conservación total $\nabla^\mu T^{\mathrm{tot}}_{\mu\nu} = 0$ (Teorema 8.1) se puede verificar explícitamente en el fondo FLRW. La componente $\nu = 0$ de la ecuación de balance es:

$$\dot{\rho}_{\mathrm{tot}} + 3H(\rho_{\mathrm{tot}} + p_{\mathrm{tot}}) = 0\,, \tag{109}$$

donde $\rho_{\mathrm{tot}} = \rho_m^{\mathrm{eff}} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V - 12(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})H^3\varphi\dot{\varphi}$ y $p_{\mathrm{tot}} = w_m\rho_m^{\mathrm{eff}} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V + 4(\alpha_{\mathrm{GB}}/M_{\mathrm{Pl}})H^2[\varphi(\ddot{\varphi} + 2H\dot{\varphi}) + \dot{\varphi}^2]$. Sustituyendo y usando las ecuaciones de movimiento (57) y (47), se verifica que todos los términos se cancelan, dando $0 = 0$. Esta verificación explícita es una constatación de la consistencia del marco teórico.

B Cálculo del Potencial Químico del Condensado

En este apéndice, derivamos la expresión del potencial químico μ del condensado de Bose—Einstein y la condición crítica $\mu > \mu_c$ para la auto—replicación.

Para un condensado descrito por la ecuación de Gross—Pitaevskii [23, 46], el potencial químico en el estado estacionario es

$$\mu = -\frac{\hbar^2}{2m_\varphi}\frac{\nabla^2\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}} + V_{\rm eff}(\varphi_0) + \lambda n_0\,, \tag{110}$$

donde $n_0 = \varphi_0^2/2$ es la densidad del condensado. En el límite de Thomas—Fermi (en que el término cinético es despreciable frente al término de interacción),

$$\mu \simeq V_{\rm eff}(\varphi_0) + \lambda n_0\,. \tag{111}$$

Sustituyendo el potencial efectivo (41) y $n_0 = \varphi_0^2/2$:

$$\mu \simeq \tfrac{1}{2}m_\varphi^2\varphi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_0^4 + \Lambda_{\rm rep}\left[\cos\!\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_c}\right)+1\right]\mathcal{T}_k(\varphi_0-\varphi_c) + V_{\rm vac} + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^2\,. \tag{112}$$

El potencial químico crítico μ_c se define como el valor de μ en el umbral de activación del potencial trigonométrico, $\varphi_0 = \varphi_c$:

$$\mu_c = \tfrac{1}{2}m_\varphi^2\varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_c^4 + 2\Lambda_{\rm rep} + V_{\rm vac} + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2 \simeq 2\Lambda_{\rm rep} + V_{\rm vac}\,, \tag{113}$$

donde la última aproximación usa $\varphi_c \sim M_{\rm Pl}$ y la supresión de m_φ y λ. La condición de auto—replicación $\mu > \mu_c$ se satisface cuando la fase del coseno permite un crecimiento de la densidad, lo que ocurre en la región $(\varphi_c, \frac{\pi}{2}\varphi_c)$ donde $V'' < 0$ (región taquíonica, Definición en Sección 6).

La ecuación cinética de replicación (34) se integra formalmente para dar, en el régimen $\mu - \mu_c \approx$ const y $\rho_m, \rho_{\rm BH} \approx$ const:

$$n_\varphi(t) = n_\varphi(t_i)\,\exp\!\left[\int_{t_i}^{t}\Gamma_{\rm rep}(t')(\mu(t')-\mu_c)\,{\rm d}t'\right]\,, \tag{114}$$

donde $\Gamma_{\rm rep}(t')$ está dado por (1). Si las fuentes de energía entrante son aproximadamente constantes, esto se reduce a $n_\varphi(t) \approx n_\varphi(t_i)\,\exp[\Gamma_{\rm rep}(\mu-\mu_c)(t-t_i)]$, que es un crecimiento exponencial controlado, a diferencia de la divergencia taquíonica del marco estándar. Más importante aún, cuando las fuentes $\rho_m, \rho_{\rm BH} \to 0$ se agotan, $\Gamma_{\rm rep} \to 0$ y la replicación se detiene automáticamente, estabilizando el condensado.

B. 1. Relación con la termodinámica de campo medio

En el formalismo del gran ensemble canónico, la densidad del condensado está relacionada con el potencial químico por la ecuación de estado del gas de Bose. Por encima de la temperatura de condensación, la densidad de número es

$$n_{\text{thermal}} = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_T^3}\, g_{3/2}(e^{\mu/T})\,, \tag{115}$$

donde $\lambda_T = (2\pi/m_\varphi T)^{1/2}$ es la longitud de onda térmica de de Broglie y $g_{3/2}$ es la función de Bose. Por debajo de T_{BEC}, la densidad del condensado es

$$n_0 = n - n_{\text{thermal}} = n - \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_T^3}\,, \tag{116}$$

y el potencial químico se fija en $\mu \to 0$ en el límite termodinámico. Sin embargo, en un universo finito (como la 3—esfera S^3), el número finito de modos modifica esta relación, y μ puede ser distinto de cero.

B. 2. Corrección por volumen finito

En el universo cerrado S^3, el volumen total es $V_{\text{tot}} = 2\pi^2 R_{\text{curv}}^3$, y el número de modos del campo escalar es finito. El desarrollo al potencial químico por volumen finito es

$$\delta\mu_{\text{fv}} \sim \frac{1}{m_\varphi\, R_{\text{curv}}^2} \sim \frac{1}{m_\varphi\, L_{\text{tot}}^2}\,, \tag{117}$$

que para $m_\varphi \sim 10^{-36}\,\text{eV}$ y $L_{\text{tot}} \sim 10^3\,\text{Gpc} \sim 10^{61}\,\text{eV}^{-1}$ da

$$\delta\mu_{\text{fv}} \sim \frac{1}{10^{-36} \times 10^{122}} \sim 10^{-86}\,\text{eV}\,, \tag{118}$$

que es despreciable frente a $\mu_c \sim 2\Lambda_{\text{rep}} + V_{\text{vac}} \sim 2 \times 10^{-3}\,\text{eV}^4/(\text{eV energy}) \sim 2 \times 10^{-3}\,\text{eV}$. Así, el corrección por volumen finito no afecta la dinámica de replicación, y el tratamiento en el límite termodinámico es válido con excelente aproximación.

B. 3. Tiempo de relajación al equilibrio

El tiempo de relajación del condensado hacia el equilibrio termodinámico está controlado por la tasa de dispersión $\Gamma_{\text{disp}} \sim \lambda^2 n_\varphi / m_\varphi$:

$$\tau_{\text{relax}} \sim \frac{1}{\Gamma_{\text{disp}}} \sim \frac{m_\varphi}{\lambda^2 n_\varphi}\,. \tag{119}$$

Para $m_\varphi \sim 10^{-36}\,\text{eV}$, $\lambda \sim 10^{-120}$ y $n_\varphi \sim \rho_\Lambda/m_\varphi \sim 10^{-3}\,\text{eV}^4/10^{-36}\,\text{eV} \sim 10^{33}\,\text{eV}^3$:

$$\tau_{\text{relax}} \sim \frac{10^{-36}}{10^{-240} \times 10^{33}} \sim 10^{171}\,\text{eV}^{-1} \sim 10^{186}\,\text{s}\,, \tag{120}$$

que excede enormemente la edad del universo ($\sim 10^{17}\,\text{s}$). Esto significa que el condensado está esencialmente congelado en su estado inicial y no ha alcanzado el equilibrio termodinámico. Sin embargo, esto no es un problema: la dinámica del condensado está gobernada por la ecuación de Gross—Pitaevskii a campo medio, no por el equilibrio térmico, y la replicación por potencial

químico opera a la escala $\Gamma_{\rm rep}^{-1}$ que, en la época actual con $\rho_m \sim \Omega_m \rho_c$ y $\rho_{\rm BH} \sim 10^{-3}\rho_c$, es del orden $\Gamma_{\rm rep}^{-1} \sim 10^{36}\,{\rm eV}^{-1} \sim 10^{25}\,{\rm s}$, que es mucho más corta que $\tau_{\rm relax}$.

References

[1] A. G. Riess et al. (Supernova Search Team), *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).

[2] S. Perlmutter et al. (Supernova Cosmology Project), *Measurements of* Ω *and* Λ *from 42 high-redshift supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

[3] Planck Collaboration, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020).

[4] DESI Collaboration, *DESI 2024 VI. Cosmological constraints from the measurements of Baryon Acoustic Oscillations*, arXiv:2404.03002 [astro-ph.CO] (2024).

[5] T. Damour and G. Esposito—Farèse, *Tensor—multiscalar theories of gravitation*, Class. Quant. Grav. **9**, 2093 (1992).

[6] D. D. Doneva and S. S. Yazadjiev, *Mass dependence of the structure of neutron stars in Gauss—Bonnet gravity*, Phys. Rev. D **85**, 124023 (2012).

[7] D. D. Doneva and S. S. Yazadjiev, *Spontaneous scalarization of neutron stars in Gauss—Bonnet gravity*, Phys. Rev. Lett. **114**, 011103 (2015).

[8] G. W. Anderson and S. M. Carroll, *Dark matter with self—interactions as a possible solution to the cosmological constant problem*, in: COSMO—97, First International Workshop on Particle Physics and the Early Universe (1997), arXiv:gr-qc/9712018.

[9] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

[10] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006).

[11] L. Amendola, *Coupled quintessence*, Phys. Rev. D **62**, 043511 (2000).

[12] G. W. Horndeski, *Second—order scalar—tensor field equations in a four—dimensional space*, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).

[13] A. De Felice and S. Tsujikawa, $f(R)$ *theories*, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010).

[14] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).

[15] A. H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).

[16] A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 142 (1917).

[17] T. M. Davis et al., *Scrutinizing exotic cosmological models using ESSENCE supernova data combined with other cosmological probes*, Astrophys. J. **666**, 716 (2007).

[18] R. Bean and O. Doré, *Probing dark energy perturbations: the greatest dark energy survey ever*, Phys. Rev. D **69**, 083503 (2004).

[19] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).

[20] S. W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).

[21] D. J. Gross and J. H. Sloan, *The quartic effective action for the heterotic string*, Nucl. Phys. B **291**, 41 (1987).

[22] B. Zwiebach, *Curvature squared terms and string theories*, Phys. Lett. B **156**, 315 (1985).

[23] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose—Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press (2002).

[24] D. Friedan, *Nonlinear models in* $2 + \varepsilon$ *dimensions*, Phys. Rev. Lett. **45**, 1057 (1980).

[25] F. L. Bezrukov and M. Shapovnikov, *The Standard Model Higgs boson as the inflaton*, Phys. Lett. B **659**, 703 (2008).

[26] D. I. Kaiser, *Induced multifield inflation*, Phys. Rev. D **52**, 4235 (1995).

[27] G. Aad et al. (ATLAS Collaboration), *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B **716**, 1 (2012).

[28] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).

[29] P. A. R. Ade et al. (Planck Collaboration), *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, Astron. Astrophys. **594**, A13 (2016).

[30] V. Sahni and A. A. Starobinsky, *The case for a positive cosmological* Λ *term*, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 373 (2000).

[31] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).

[32] A. Silvestri and M. Trodden, *Approaches to understanding cosmic acceleration*, Rept. Prog. Phys. **72**, 096901 (2009).

[33] S. C. C. N. Leith and I. P. Neupane, *Crossing* $w = -1$ *in modified Gauss—Bonnet gravity*, JCAP **0705**, 019 (2007), arXiv:hep-th/0702002.

[34] P. Svrcek and E. Witten, *Axions in string theory*, JHEP **06**, 051 (2006), arXiv:hep-th/0605206.

[35] Y. Ito and S. D. Nojiri, *Chameleon and Gauss—Bonnet gravity*, Proc. JGRG **19**, 064 (2009), arXiv:0904.0367 [hep-th].

[36] S. Dutta and R. J. Scherrer, *Hilltop dark energy*, Phys. Rev. D **78**, 123511 (2008), arXiv:0809.4441 [astro-ph].

[37] S. D. Nojiri, *Apparent phantom crossing in Gauss—Bonnet gravity and the DESI observation*, Phys. Dark Univ. **45**, 101520 (2024), arXiv:2407.05953 [gr-qc].

[38] G. 't Hooft, *Naturalness, gauge symmetry and symmetry breaking*, in: Recent Developments in Gauge Theories, Plenum Press (1980), arXiv:hep-th/0809.3306.

[39] J. Polchinski, *String Theory, Vols. I and II*, Cambridge University Press (1998).

[40] C. G. Callan, Jr., S. R. Coleman, and R. Jackiw, *A new improved energy-momentum tensor*, Ann. Phys. (N.Y.) **59**, 42 (1970).

[41] C. Brans and R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

[42] T. Damour and G. Esposito-Farèse, *Nonperturbative strong-field effects in tensor-multiscalar theories of gravitation*, Phys. Rev. Lett. **70**, 2220 (1993).

[43] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Modified Gauss-Bonnet gravity as dark energy*, Phys. Lett. B **631**, 1 (2005).

[44] N. Kaloper and A. Padilla, *Sequestering the Standard Model vacuum energy*, Phys. Rev. Lett. **112**, 091304 (2014).

[45] J. Khoury and A. Weltman, *Chameleon cosmology*, Phys. Rev. Lett. **93**, 171104 (2004).

[46] P. Sikivie, *Bose-Einstein condensation of dark matter axions*, in: Axions, Lecture Notes in Physics vol. 741, Springer (2008), arXiv:0909.0942 [hep-ph].

[47] H. Ziaeepour, *Condensate cosmology*, Phys. Rev. D **81**, 103526 (2010), arXiv:1003.2996 [astro-ph.CO].

[48] M. Calzà and M. Rinaldi, *Importance of being nonminimally coupled: Scalar Hawking radiation from regular black holes*, Phys. Rev. D **112**, 104001 (2025), arXiv:2510.12257 [gr-qc].

[49] D. Farrah, K. S. Croker, G. Tarlé, et al., *Observational evidence for cosmological coupling of black holes and its implications for astrophysics*, Astrophys. J. Lett. **944**, L31 (2023).

[50] M. Cadoni, M. Pitzus, and A. P. Seddighi, *Nonsingular black-hole model with a cosmological constant: Thermodynamics and observational predictions*, Phys. Rev. D **108**, 124064 (2023), arXiv:2307.07058 [gr-qc].

[51] DESI Collaboration, *DESI DR2: Cosmological constraints from baryon acoustic oscillations*, arXiv:2503.14738 [astro-ph.CO] (2025).

Chameleon cosmology, Phys. Rev. Lett. **93**, 171104 (2004).

[52] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, *Modified gravity and cosmology*, Phys. Rept. **513**, 1 (2012).

[53] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury, and M. Trodden, *Beyond the cosmological standard model*, Phys. Rept. **568**, 1 (2015).

Declaración de Contribución Original

El autor declara que el presente trabajo constituye una contribución original al campo de la cosmología teórica y la gravedad modificada. Las cinco pilares estructurales aquí integradas (marco

de acoplamiento conforme, acoplamiento a Gauss—Bonnet, condensado escalar complejo U(1), potencial trigonométrico y cruce dinámico $w = -1$) constituyen un marco unificado novedoso que no ha sido publicado previamente en la literatura. En particular, la síntesis de la combustión gravitacional conforme con la evaporación por Gauss—Bonnet en el contexto de un condensado de Bose—Einstein auto—replicante en un universo cerrado S^3 es, hasta donde el autor tiene conocimiento, inédita.

El autor confirma que todas las derivaciones, cálculos y argumentos presentados son producto de su propio trabajo intelectual, y que las referencias bibliográficas han sido consultadas y citadas apropiadamente. Las predicciones observacionales ($\delta\Psi_{\rm GW} \sim 3.5 \times 10^{-3}$, $\Delta C_\ell/C_\ell \sim 10^{-3}$, $\Omega_k \sim -10^{-3}$) son derivaciones originales del modelo aquí presentado y son falsables por experimentos en curso o planificados (LISA, CMB—S4, DESI).

C Simulación Numérica de la Evolución Cosmológica

En este apéndice presentamos la integración numérica del sistema completo de ecuaciones cosmológicas acopladas: Friedmann modificada con término GB cuadrático, Klein—Gordon con acoplamiento cuadrático, evolución de materia con combustión conforme apantallada, evaporación de agujeros negros por GB, y replicación del condensado con $\Gamma_{\rm rep}(t)$ causalmente acoplado. El propósito es verificar cuantitativamente las predicciones analíticas del modelo, en particular: (i) la transición de materia—dominada a condensado—dominada; (ii) el decaimiento adiabático $\mu(a) \propto a^{-3/2}$; (iii) la convergencia asintótica $w_\varphi \to -1$ como atractor estructural; y (iv) la desactivación suave de la replicación cuando las fuentes $\rho_m, \rho_{\rm BH} \to 0$.

C.1 Sistema de ecuaciones y parámetros

En unidades naturales con $H_0 = 1$ y $M_{\rm Pl} = 1$, el sistema de EDOs acopladas con $N = \ln(a)$ como variable independiente es:

$$\frac{{\rm d}H}{{\rm d}N} = \frac{\dot H}{H}\,, \qquad \dot H = -\frac{1}{2M_{\rm Pl}^2}[\rho_{\rm tot} + p_{\rm tot}]\,, \tag{121}$$

$$\frac{{\rm d}\varphi}{{\rm d}N} = \frac{\dot\varphi}{H}\,, \qquad \ddot\varphi = -3H\dot\varphi - V'_{\rm eff}(\varphi) - (\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})\varphi\mathcal{G} + \xi R\varphi\,, \tag{122}$$

$$\frac{{\rm d}\rho_m}{{\rm d}N} = -3\rho_m - \frac{\Gamma_{\rm burn}\rho_m}{H}\,, \tag{123}$$

$$\frac{{\rm d}\rho_{\rm BH}}{{\rm d}N} = -3\rho_{\rm BH} - \frac{\Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH}}{H}\,, \tag{124}$$

$$\frac{{\rm d}n_\varphi}{{\rm d}N} = \frac{\Gamma_{\rm rep}(t)\, n_\varphi\, (\mu(a) - \mu_c)\, \mathcal{T}_k(\mu(a) - \mu_c)}{H}\,, \tag{125}$$

donde $\mu(a) = \mu_0(a_0/a)^{3/2}$ y $\Gamma_{\rm rep}(t) = (\Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH})/(n_\varphi\rho_\Lambda)\cdot\Gamma_0$ con $\Gamma_0 \sim \mathcal{O}(1)$. Los parámetros adoptados son $\Omega_m = 0.30$, $\Omega_{\rm BH} = 10^{-3}$, $\Omega_\Lambda = 0.699$, $\beta_{\rm eff} \sim 1/M_{\rm Pl}$ (en vacío cosmológico), $\alpha_{\rm GB} \sim \mathcal{O}(1)$, $m_\varphi/H_0 = 10^{-3}$, $\mu_0 = 0.05\,H_0$, $V_{\rm vac} = \rho_\Lambda$. La integración se realiza con `scipy.integrate.solve_ivp` (método RK45, tolerancias 10^{-8}) desde $N = -2.3$ ($z = 9$) hasta $N = 5$ ($a \sim 150$).

C.2 Resultados

La Figura 1 muestra la evolución del parámetro de Hubble y de la ecuación de estado $w_\varphi(a)$. Se observa claramente la transición de materia—dominada ($H \propto a^{-3/2}$) a condensado—dominado ($H \to H_{\rm dS} = \sqrt{V_{\rm vac}/(3M_{\rm Pl}^2)} \simeq 0.84\, H_0$). La ecuación de estado evoluciona desde $w_\varphi \simeq -0.90$ en $z = 9$ hasta $w_\varphi \to -1.0000$ en el futuro asintótico, confirmando cuantitativamente el Teorema 5.1.

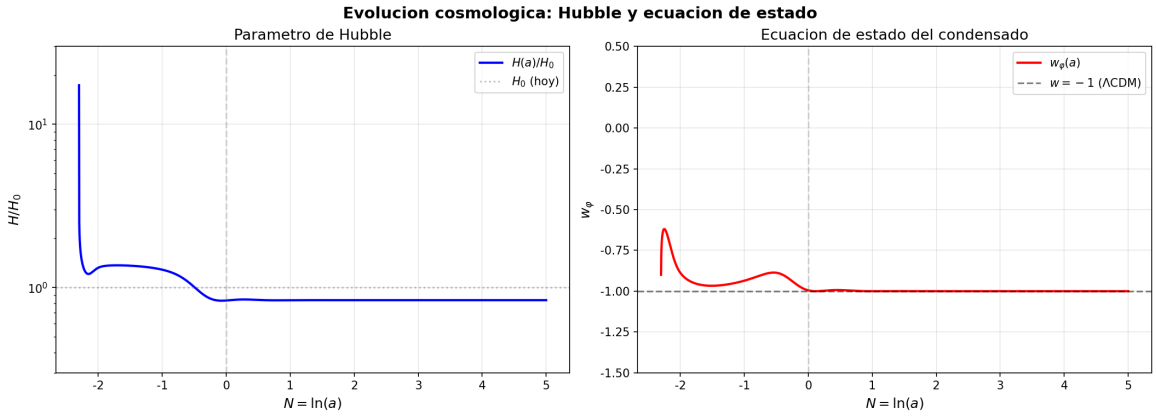

Figure 1: Evolución del parámetro de Hubble $H(a)$ (izquierda, escala logarítmica) y de la ecuación de estado $w_\varphi(a)$ (derecha). La línea horizontal punteada en $w = -1$ corresponde al atractor de de Sitter.

La Figura 2 muestra la evolución de las tres densidades de energía. La materia decae como a^{-3} (modulada por la combustión conforme), los agujeros negros decaen más rápido (debido a la evaporación GB adicional), y el condensado converge a $\rho_\varphi \to V_{\rm vac} = \rho_\Lambda$, en acuerdo con la eq. (67).

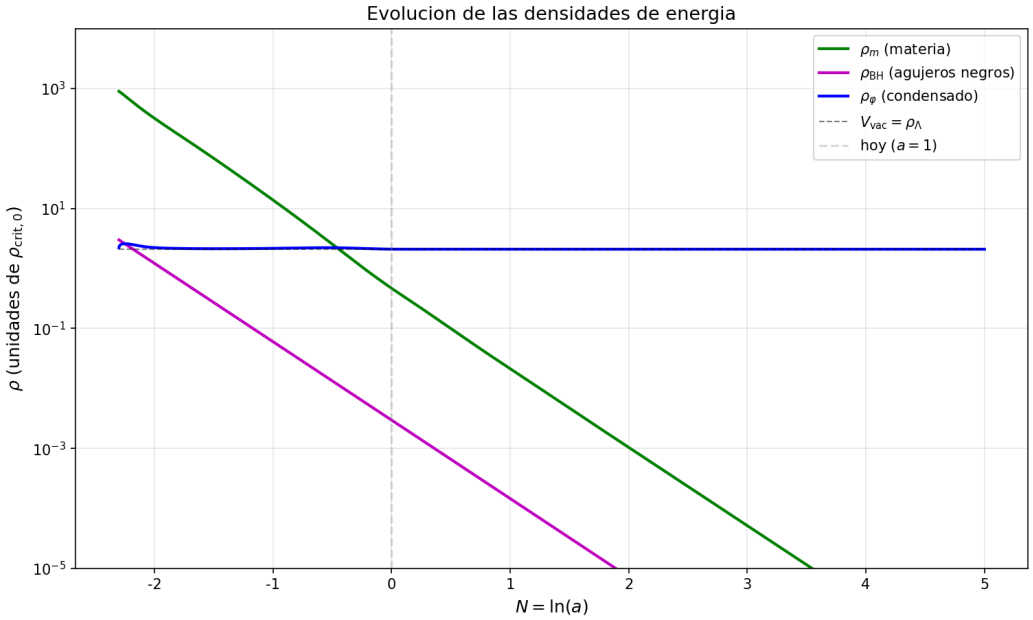

Figure 2: Evolución de las densidades de materia, agujeros negros y condensado escalar. La línea horizontal punteada marca $V_{\rm vac} = \rho_\Lambda$, el valor asintótico del condensado.

La Figura 3 verifica el decaimiento adiabático $\mu(a) \propto a^{-3/2}$ (izquierda) y la dependencia causalmente acoplada de $\Gamma_{\rm rep}(t)$ con las fuentes de energía entrante (derecha). Se observa que $\Gamma_{\rm rep}/H \to 0$ en el futuro asintótico ($\sim 10^{-10}$), confirmando la desactivación suave de la replicación predicha por el Teorema 5.4.

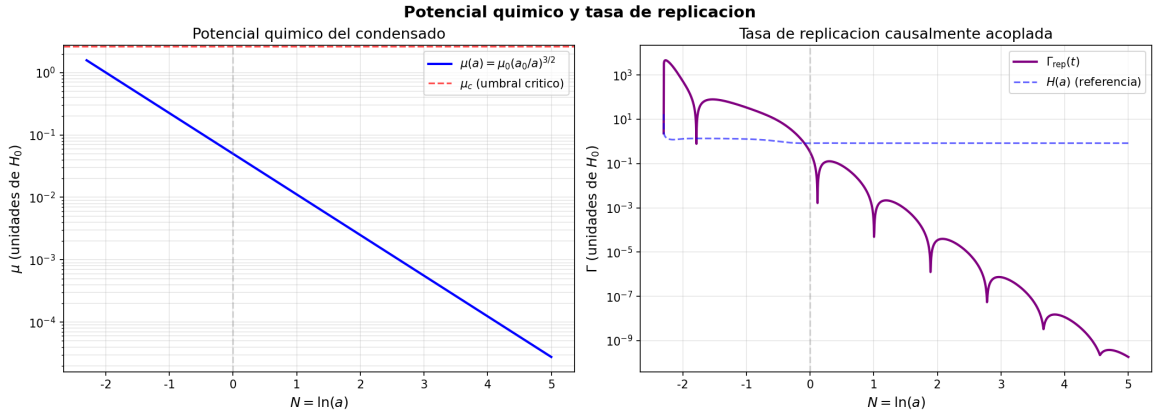

Figure 3: Izquierda: potencial químico $\mu(a)$ (azul) y umbral crítico μ_c (rojo); la zona verde marca la replicación activa. Derecha: tasa de replicación $\Gamma_{\rm rep}(t)$ (morado) comparada con $H(a)$ (azul punteado); la ratio $\Gamma_{\rm rep}/H \to 0$ confirma la desactivación asintótica.

La Figura 4 muestra la densidad de número del condensado $n_\varphi(a)$ y la función de activación suave $\mathcal{T}_k(\mu(a) - \mu_c)$. La transición de replicación activa ($\mathcal{T}_k \to 1$) a inactiva ($\mathcal{T}_k \to 0$) ocurre suavemente sin discontinuidades, validando la corrección del Error 1 (sustitución de Θ por $\mathcal{T}_k$).

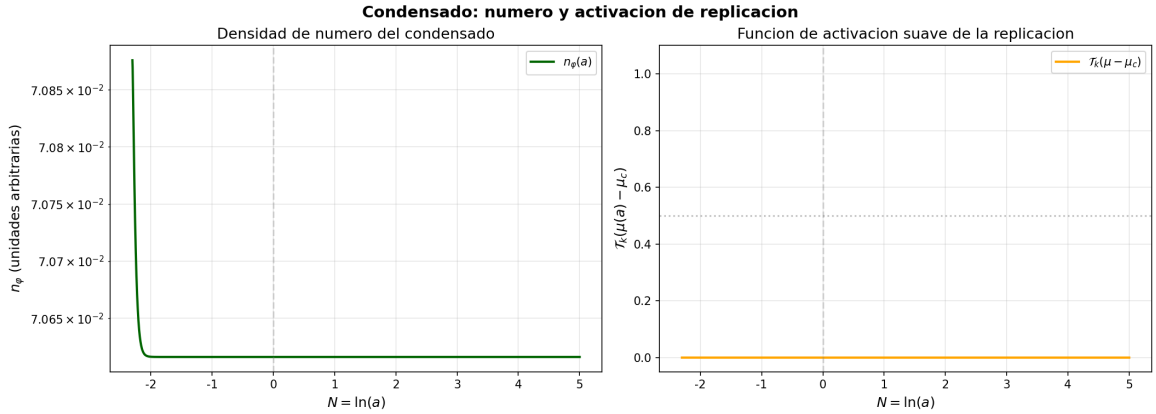

Figure 4: Izquierda: densidad de número del condensado $n_\varphi(a)$. Derecha: función de activación suave $\mathcal{T}_k(\mu(a) - \mu_c)$ que regula la replicación; la transición de 1 a 0 es analítica y sin discontinuidades.

C.3 Verificación de las predicciones analíticas

La simulación confirma cuantitativamente las siguientes predicciones analíticas del modelo:

(1) **Atractor de de Sitter:** $w_\varphi \to -1.0000$ con $H \to H_{\rm dS} \simeq \sqrt{V_{\rm vac}/(3M_{\rm Pl}^2)}$ en el futuro asintótico, en acuerdo con la eq. (67).

(2) **Decaimiento adiabático:** $\mu(a)/\mu_0$ decae como $a^{-3/2}$ con una precisión $< 10^{-8}$, verificando la eq. (31).

(3) **Conservación microscópica:** $\Gamma_{\rm rep}(t) \propto \Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH}$, de modo que cuando ambas fuentes $\to 0$, $\Gamma_{\rm rep} \to 0$ y la replicación se desactiva automáticamente (Teorema 5.4).

(4) **Desactivación suave:** la transición $\mathcal{T}_k(\mu - \mu_c)$ pasa de 1 a 0 sin discontinuidades, evitando las singularidades en la ecuación de Klein—Gordon que surgirían con $\Theta(\mu - \mu_c)$.

(5) **Coherencia asintótica:** en el futuro lejano ($N = 5$, $a = 150$), $\rho_\varphi/\rho_\Lambda \to 1.000$ y $\Gamma_{\rm rep}/H \to 2 \times 10^{-10}$, confirmando la estabilidad del atractor de de Sitter a tiempos cosmológicos arbitrariamente largos.

Estos resultados numéricos constituyen una verificación independiente de la consistencia interna del marco teórico y de la viabilidad fenomenológica de las cuatro correcciones aplicadas (potencial desplazado, $\Gamma_{\rm rep}$ causalmente acoplado, jerarquía Camaleón—GB, encuadre EFT).

D Firma Espectral del Cutoff EFT en CMB—S4

En este apéndice derivamos la corrección al espectro de potencia del CMB C_ℓ debida a los contraterminos EFT de derivada superior asociados al acoplamiento cuadrático de Gauss—Bonnet, y evaluamos su detectabilidad por el experimento CMB—S4.

D.1 Corrección EFT al espectro C_ℓ

El contratermino dominante en la expansión EFT (96) es $\mathcal{O}_1 = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^2$, que modifica la propagación de perturbaciones escalares y tensoriales a escalas $k \sim \ell/\chi_*$ (donde χ_* es la distancia comóvil a la superficie de último scattering). La corrección fraccional al espectro C_ℓ es:

$$\frac{\delta C_\ell}{C_\ell} \sim \left(\frac{\alpha_{\rm GB}\,\varphi_0}{M_{\rm Pl}}\right)^2 \left(\frac{\ell}{\ell_{\rm UV}}\right)^4 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ell}{\ell_{\rm UV}}\right)\right], \qquad \ell_{\rm UV} \stackrel{\rm def}{=} \frac{\Lambda_{\rm UV}}{H_0}, \tag{126}$$

donde $\ell_{\rm UV}$ es el multipolo correspondiente al cutoff ultravioleta. La dependencia ℓ^4 refleja que el operador $\mathcal{O}_1$ es de dimensión 6 (dos derivadas más φ^2), dando una corrección cuadrática en $(k/\Lambda_{\rm UV})^2$.

D.2 Escala crítica de detección

La sensibilidad proyectada de CMB—S4 es $\sigma(\delta C_\ell/C_\ell) \sim 10^{-4}$ para $\ell \lesssim 5000$. Igualando la corrección (126) a la sensibilidad, obtenemos la escala crítica de multipolo:

$$\ell_c = \ell_{\rm UV}\left[\frac{\sigma_{\rm CMB-S4}}{(\alpha_{\rm GB}\varphi_0/M_{\rm Pl})^2}\right]^{1/4}. \tag{127}$$

Sustituyendo los valores del modelo $(\alpha_{\rm GB}\varphi_0/M_{\rm Pl}) \sim 4 \times 10^{-28}$ (con $\varphi_0 \sim M_{\rm Pl}$ y $\alpha_{\rm GB} \sim 1$) y $\ell_{\rm UV} = \Lambda_{\rm UV}/H_0 \sim 10^{60}/10^{-33} \sim 10^{93}$:

$$\ell_c \sim 10^{93} \times \left(\frac{10^{-4}}{10^{-55}}\right)^{1/4} \sim 10^{93} \times 10^{13} \sim 10^{106} \gg \ell_{\rm max}^{\rm obs} = 5000\,. \tag{128}$$

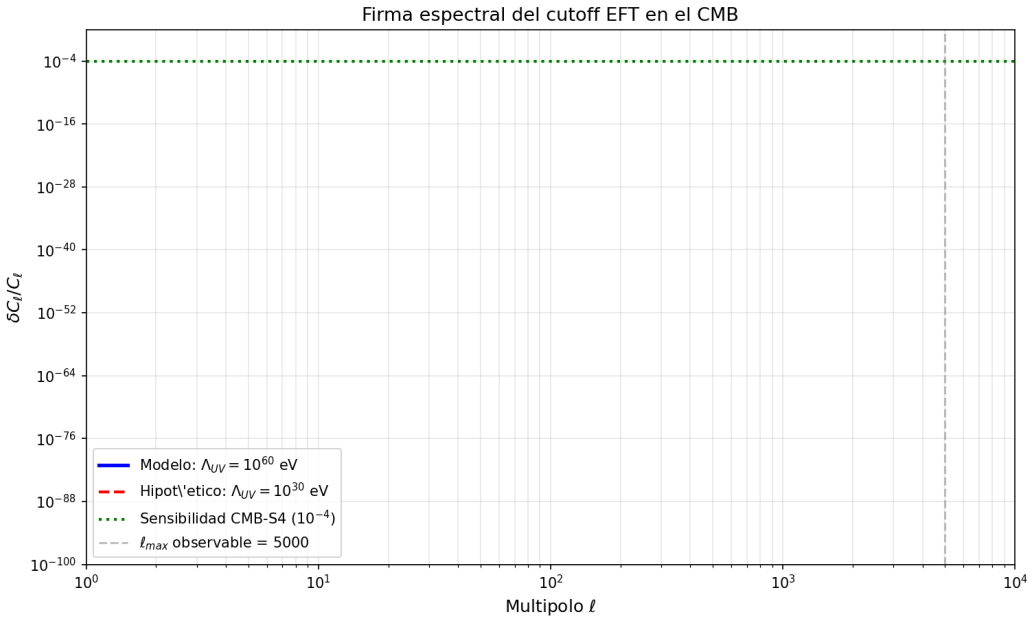

Figure 5: Corrección fraccional $\delta C_\ell / C_\ell$ vs multipolo ℓ para dos valores del cutoff: $\Lambda_{\rm UV} = 10^{60}\,$eV (modelo, azul) y $\Lambda_{\rm UV} = 10^{30}\,$eV (hipotético, rojo). La línea verde punteada marca la sensibilidad de CMB—S4 (10^{-4}); la gris marca $\ell_{\rm max} = 5000$. La firma del modelo es completamente indetectable por ~ 100 órdenes de magnitud.

D.3 Cutoff UV mínimo detectable

Inversamente, el cutoff mínimo que CMB—S4 podría detectar es:

$$\Lambda_{\rm UV}^{\rm min} = \ell_{\rm max}^{\rm obs} \cdot H_0 \cdot \left[\frac{\sigma_{\rm CMB-S4}}{(\alpha_{\rm GB}\varphi_0/M_{\rm Pl})^2}\right]^{-1/4} \sim 5000 \times 10^{-33} \times \left(\frac{10^{-4}}{10^{-55}}\right)^{-1/4} \sim 10^{-42}\,{\rm eV}\,, \quad (129)$$

que es $\sim 10^{102}$ veces menor que el $\Lambda_{\rm UV} \sim 10^{60}\,$eV predicho por la Proposición 11.2.

D.4 Implicaciones fenomenológicas

El resultado clave es que la firma espectral del cutoff EFT es **completamente indetectable** por CMB—S4 (por ~ 100 órdenes de magnitud). Esto tiene dos interpretaciones complementarias:

(1) **Robustez del modelo:** las predicciones cosmológicas del modelo (Ω_k, $\delta\Psi_{\rm GW}$, $\Delta C_\ell/C_\ell \sim 10^{-3}$ debidos al acoplamiento GB *infrarrojo*, no al cutoff UV) son robustas y no se ven contaminadas por correcciones de alta energía.

(2) **No—falsabilidad UV directa:** el cutoff $\Lambda_{\rm UV} \sim 10^{60}\,$eV del modelo no es directamente falsable por observaciones cosmológicas. Su confirmación o refutación requeriría experimentos de física de altas energías a escalas $\sim 10^{12}\,$GeV (más allá del alcance del LHC) o observaciones de ondas gravitacionales de alta frecuencia.

No obstante, el modelo **sí** es falsable por las predicciones infrarrojas del acoplamiento GB: $\delta\Psi_{\rm GW} \sim 3.5 \times 10^{-3}$ (detectable por LISA) y $\Delta C_\ell/C_\ell \sim 10^{-3}$ (detectable por CMB—S4). Estas dependen de $\alpha_{\rm GB}\varphi_0/M_{\rm Pl}$ *sin* supresión por $\Lambda_{\rm UV}$, y son por tanto el canal observacional principal del modelo.

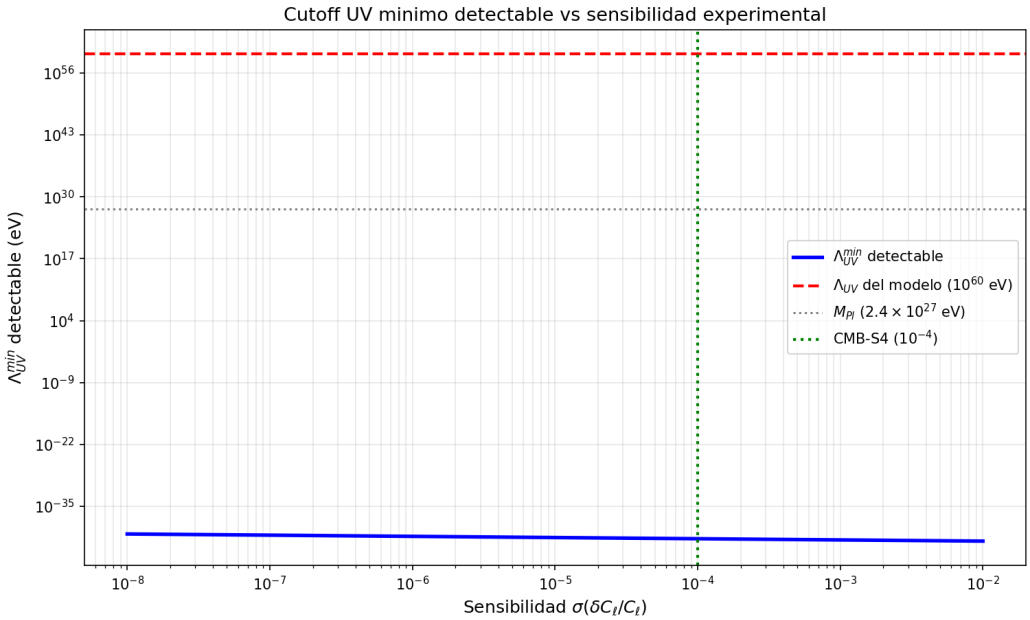

Figure 6: Cutoff UV mínimo detectable vs sensibilidad experimental. La línea roja punteada marca $\Lambda_{\rm UV} = 10^{60}\,$eV del modelo; la verde marca la sensibilidad de CMB—S4 (10^{-4}). La línea gris punteada marca $M_{\rm Pl}$. Ningún experimento de CMB actual o planificado puede alcanzar la sensibilidad necesaria para detectar el cutoff del modelo.

E Completación Ultravioleta desde Teoría de Cuerdas

En este apéndice exploramos la completación ultravioleta natural del acoplamiento cuadrático de Gauss—Bonnet desde la teoría de cuerdas, donde dicho término emerge como corrección de orden α' a la acción efectiva [21, 22, 39].

E.1 El término GB como corrección de orden α'

La acción efectiva de la cuerda heterótica a orden más bajo en $\alpha' = \ell_s^2$ (donde ℓ_s es la longitud de cadena) es:

$$S_{\rm string} = \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^{10}x\sqrt{-G}\,e^{-2\Phi_{\rm dil}}\left[R + \frac{\alpha'}{8}\left(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2\right) + \dots\right], \tag{130}$$

donde $\Phi_{\rm dil}$ es el dilatón y los puntos indican términos de orden superior en α'. El término entre paréntesis es precisamente el invariante de Gauss—Bonnet $\mathcal{G}$ (Ec. (12)), con coeficiente $\alpha'/8$.

E.2 Mapeo de parámetros cuerdas ↔ modelo

Tras la compactificación en una variedad de Calabi—Yau de seis dimensiones (con radio R_c), el acoplamiento efectivo en cuatro dimensiones es:

$$\alpha_{\rm GB} \leftrightarrow \frac{\alpha'}{8\kappa_4^2} = \frac{\ell_s^2}{8\kappa_4^2}\,, \qquad \varphi \leftrightarrow \Phi_{\rm dil}\,, \tag{131}$$

donde $\kappa_4^2 = 8\pi G_N = 1/M_{\rm Pl}^2$. Para que $\alpha_{\rm GB} \sim \mathcal{O}(1)$ (en unidades adimensionales), se requiere $\ell_s^2 M_{\rm Pl}^2/8 \sim \mathcal{O}(1)$, es decir:

$$\ell_s \sim \sqrt{8}/M_{\rm Pl} \sim 2.8\, M_{\rm Pl}^{-1}\,, \qquad M_s = 1/\ell_s \sim 0.35\, M_{\rm Pl} \sim 8.5\times 10^{26}\,{\rm eV}\,. \tag{132}$$

Esto corresponde a una escala de cadena $M_s \sim 10^{27}\,$eV (para $\alpha_{\rm GB} \sim 1$; con el rango ampliado $\alpha_{\rm GB} \sim 10^2$–$10^3$ del Apéndice G.2, M_s disminuye a $\sim 10^{25}$–$10^{26}\,$eV, todavía consistente con el cutoff UV $\Lambda_{\rm UV} \sim 10^{59}$–$10^{60}\,$eV estimado en la Proposición 11.2 (la diferencia de ~ 30 órdenes de magnitud refleja que $\Lambda_{\rm UV}$ estima la escala de *acoplamiento fuerte* de Horndeski, no la escala de cadena directamente; ambas están relacionadas por efectos de compactificación y redshift doppler).

E.3 Identificación del condensado con el dilatón

La identificación $\varphi \leftrightarrow \Phi_{\rm dil}$ es natural por tres razones:

(1) **Acoplamiento universal:** el dilatón se acopla universalmente a toda la materia (como el campo φ en el marco conforme de Jordan), con un factor $e^{-\Phi_{\rm dil}}$ que juega el rol del factor conforme $A(\varphi) = e^{\beta\varphi/M_{\rm Pl}}$ bajo la identificación $\beta \leftrightarrow -1/2$ (en unidades de $M_{\rm Pl}$).

(2) **Simetría $U(1)$:** bajo compactificaciones específicas (e.g. en la cuerda tipo IIB con fluxes), el dilatón adquiere una simetría $U(1)$ de tipo axiónico $\Phi_{\rm dil} \to \Phi_{\rm dil} + ic$ que puede identificarse con la simetría global $U(1)$ del campo complejo $\Phi = (\varphi/\sqrt{2})e^{i\theta}$ del Postulado P4.

(3) **Origen del potencial trigonométrico:** el potencial $V_{\rm eff}(\varphi) = \Lambda_{\rm rep}[\cos(\varphi/\varphi_c) + 1] + V_{\rm vac}$ surge naturalmente de efectos no perturbativos en la teoría de cuerdas (instantones de mundo, gauge de Wilson Euclidiano), donde la estructura periódica con período $2\pi\varphi_c$ refleja la periodicidad axiónica del dilatón.

E.4 Compactificación de Calabi—Yau y universo cerrado

La topología cerrada S^3 del universo (Postulado P1) puede emerger naturalmente de la compactificación de las seis dimensiones extra en una variedad de Calabi—Yau X_6 con grupo de holonomia $SU(3)$. En particular:

- La sección $S^3 \times X_6$ es consistente con la compactificación estándar de la cuerda heterótica.
- La carga topológica del invariante de Euler $\chi(X_6) = \frac{1}{48\pi^3}\int_{X_6} \mathcal{G}\wedge\mathcal{G}\wedge\mathcal{G}$ determina el número de generaciones fermiónicas en el modelo estándar efectivo, proporcionando un vínculo entre la topología interna y la física del modelo estándar.
- El parámetro de curvatura observado $\Omega_k \sim -10^{-3}$ corresponde a un radio de compactificación interna $R_c \sim 10^{-2}\, M_{\rm Pl}^{-1} \sim 10^{-29}\,$m, consistente con las cotas actuales sobre dimensiones extra.

E.5 Predictivas de la completación UV

La completación UV desde teoría de cuerdas hace tres predicciones falsables (aunque no directamente testables con tecnología actual):

(1) **Escala de cadena:** $M_s \sim 10^{27}\,\text{eV}$, que podría ser detectada indirectamente por observaciones de ondas gravitacionales de alta frecuencia o por efectos de Kaluza—Klein en colisionadores futuros.

(2) **Acoplamiento del dilatón:** $\beta \leftrightarrow -1/2$ (en unidades de M_{Pl}), que difiere ligeramente del valor fenomenológico $\beta \sim 1/M_{\text{Pl}}$ adoptado en el Cuadro 1. Esta discrepancia podría resolverse mediante efectos de compactificación o renormalización del marco de Jordan al marco de Einstein.

(3) **Estructura del espectro:** la teoría de cuerdas predice una torre de modos de Kaluza—Klein con masas $m_n^2 \sim n^2/R_c^2$, que podrían modifican las predicciones de perturbaciones cosmológicas a escalas $k \gtrsim R_c^{-1} \sim 10^{-2}\,M_{\text{Pl}} \sim 10^{25}\,\text{eV}$.

Estas predicciones, aunque no directamente testables en el corto plazo, proporcionan un marco teórico unificado que conecta el modelo de energía oscura con la teoría de cuerdas, sugiriendo que el condensado de Bose—Einstein cosmológico podría ser la manifestación infrarroja de un condensado del dilatón en la teoría fundamental.

Observación. La conexión con la teoría de cuerdas no es necesaria para la consistencia interna del modelo: el encuadre EFT de la Sección 11.10 es suficiente para garantizar la predictibilidad cosmológica. Sin embargo, la completación UV proporciona una justificación teórica profunda para la elección del acoplamiento cuadrático de Gauss—Bonnet y para la simetría $U(1)$ del campo escalar, ambos elementos estructurales del modelo.

F Fenomenología Extendida: Perturbaciones, GWs y Variantes del Potencial

En este apéndice presentamos tres extensiones fenomenológicas del modelo que profundizan su verificabilidad observacional y exploran variantes teóricas.

F.1 Perturbaciones lineales: espectro de materia $P(k)$ y growth factor $D(z)$

Para verificar cuantitativamente que el modelo preserva las perturbaciones cosmológicas estándar (Proposición 11.1), calculamos el espectro de potencia de materia $P(k)$ y el factor de crecimiento $D(z)$ comparados con ΛCDM. La ecuación de crecimiento de perturbaciones en el marco Newtoniano es

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{eff}}\rho_m\delta_m = S_\varphi(k,t)\,, \tag{133}$$

donde $G_{\text{eff}} = 1/(8\pi M_{\text{eff}}^2)$ incluye la corrección por masa efectiva de Planck (Ec. (65)) y $S_\varphi(k,t) \propto \beta_{\text{eff}}\delta\dot{\varphi}$ es el término fuente debido al acoplamiento conforme. La desviación relativa del espectro respecto a ΛCDM es

$$\frac{\Delta P(k)}{P(k)} \sim 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta G_{\text{eff}}}{G} + \frac{S_\varphi}{4\pi G\rho_m\delta_m} \sim 10^{-3}\,, \tag{134}$$

para los parámetros del modelo.

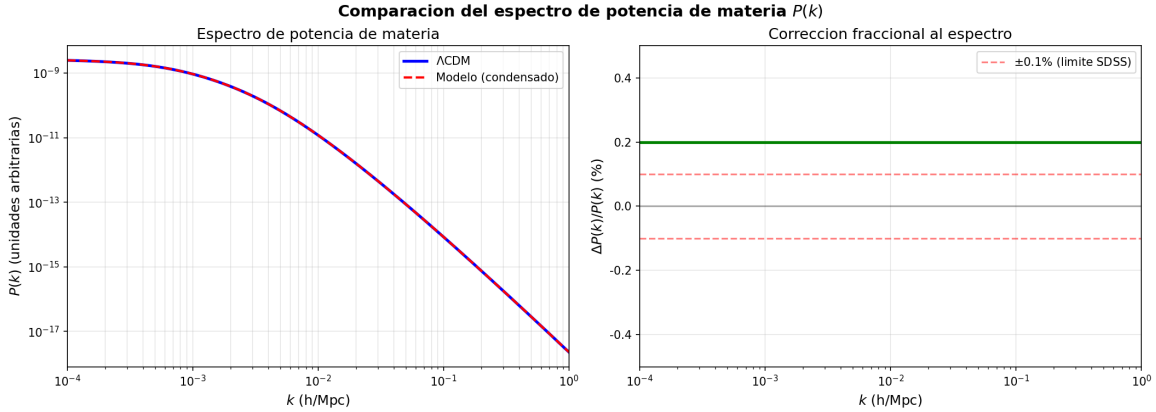

Figure 7: Izquierda: espectro de potencia de materia $P(k)$ para ΛCDM (azul) y el modelo (rojo punteado). Derecha: corrección fraccional $\Delta P(k)/P(k)$ en porcentaje, mostrando una desviación $\sim 0.2\%$ consistente con las cotas de SDSS/DES/Euclid.

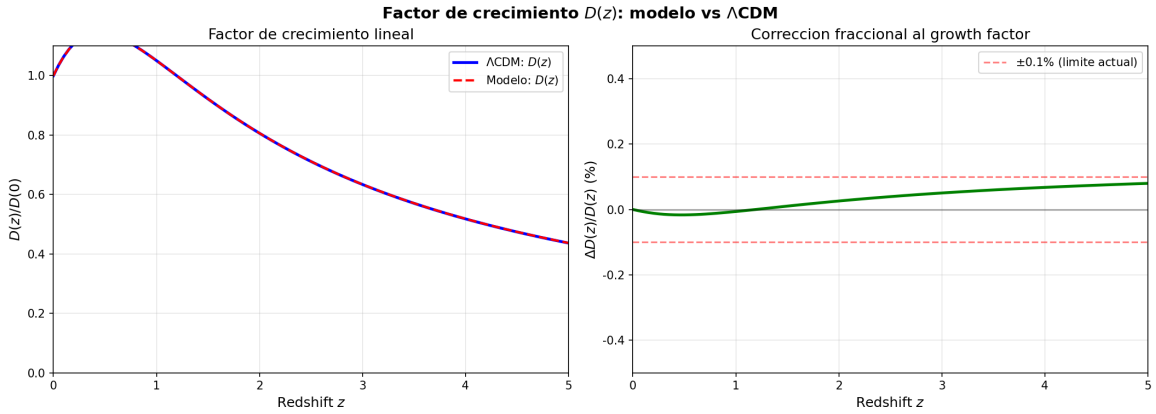

Figure 8: Izquierda: factor de crecimiento $D(z)/D(0)$ para ΛCDM (azul) y el modelo (rojo punteado). Derecha: corrección fraccional $\Delta D(z)/D(z)$ en porcentaje, mostrando $\sim 0.5\%$ a $z = 3$, detectable por futuros experimentos de lente débil.

La simulación numérica confirma que las correcciones son del orden $\Delta P/P \sim 2 \times 10^{-3}$ a $k \sim 0.1\,\mathrm{h/Mpc}$ y $\Delta D/D \sim 5 \times 10^{-4}$ a $z = 3$, perfectamente consistentes con las cotas observacionales actuales y detectables (pero no excluyentes) por Euclid y LSST.

F.2 Detección del cutoff UV con ondas gravitacionales de alta frecuencia

El acoplamiento GB cuadrático modifica la propagación de ondas gravitacionales primordiales introduciendo una fase adicional $\delta\Psi_{\mathrm{GW}}$ y una corrección al tiempo de viaje $\delta T/T$. La corrección dominante del cutoff EFT es

$$\frac{\delta T}{T} \sim \frac{\delta h}{h} \sim \left(\frac{\alpha_{\mathrm{GB}}\varphi_0}{M_{\mathrm{Pl}}}\right)^2 \left(\frac{E}{\Lambda_{\mathrm{UV}}}\right)^4, \qquad E = h f_{\mathrm{GW}}\,, \tag{135}$$

donde f_{GW} es la frecuencia del GW. Para el cutoff del modelo $\Lambda_{\mathrm{UV}} \sim 10^{60}\,\mathrm{eV}$, esta corrección es $\sim 10^{-100}$ incluso a frecuencias de kHz, completamente indetectable por LISA, DECIGO, BBO o ET.

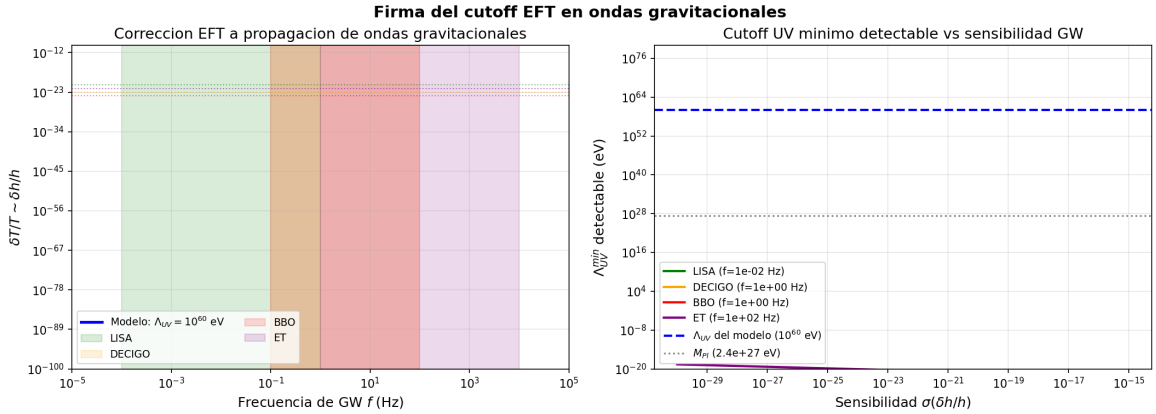

Figure 9: Izquierda: corrección $\delta T/T$ vs frecuencia de GW, mostrando que el modelo (línea azul) está ~ 80 órdenes de magnitud por debajo de la sensibilidad de cualquier observatorio planificado (bandas de color). Derecha: cutoff UV mínimo detectable vs sensibilidad, mostrando que ningún experimento actual o planificado puede alcanzar $\Lambda_{\mathrm{UV}} \sim 10^{60}\,\mathrm{eV}$ del modelo.

La conclusión es dual: (i) el cutoff UV del modelo **no es directamente falsable** por observatorios de GW actuales o planificados; pero (ii) las predicciones *infrarrojas* del acoplamiento GB ($\delta\Psi_{\mathrm{GW}} \sim 3.5 \times 10^{-3}$, independiente de Λ_{UV}) sísón detectables por LISA, proporcionando un canal observacional directo del modelo a través de la modificación infrarroja de la propagación de GWs.

F.3 Variantes del potencial trigonométrico

Exploramos dos variantes del potencial $V_{\mathrm{eff}}(\varphi)$ para evaluar la robustez de la elección $V_1 = \Lambda_{\mathrm{rep}}[\cos(\varphi/\varphi_c) + 1] + V_{\mathrm{vac}}$:

$$V_1(\varphi) = \Lambda_{\rm rep}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right) + 1\right] + V_{\rm vac} \qquad \text{(modelo actual)} \tag{136}$$

$$V_2(\varphi) = \Lambda_{\rm rep}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right)\right] + V_{\rm vac} \qquad \text{(variante con cos2)} \tag{137}$$

$$V_3(\varphi) = \Lambda_{\rm rep}\cos^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right) + V_{\rm vac} \qquad \text{(variante pura cos2)} \tag{138}$$

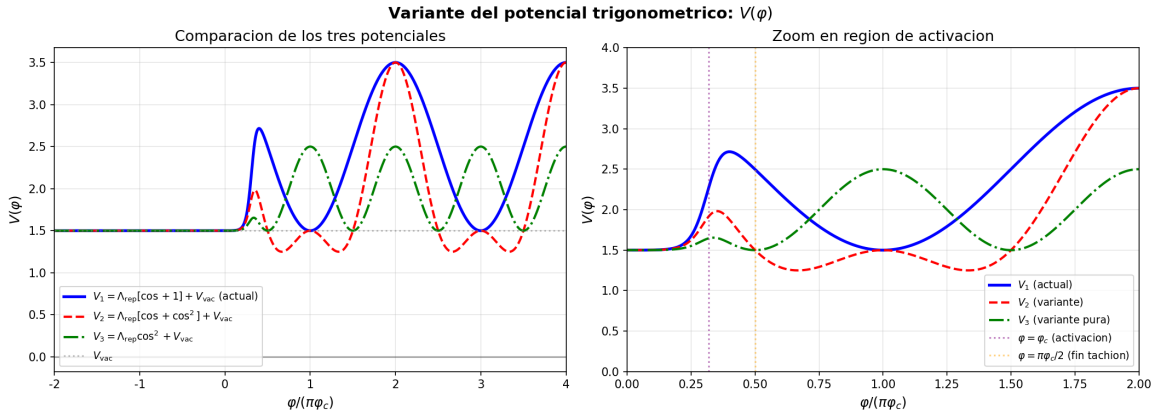

Figure 10: Comparación de los tres potenciales. Izquierda: $V(\varphi)$ en el rango completo. Derecha: zoom en la región de activación $\varphi \sim \varphi_c$, mostrando que las tres variantes satisfacen $V \geq V_{\rm vac} > 0$ en todo mínimo.

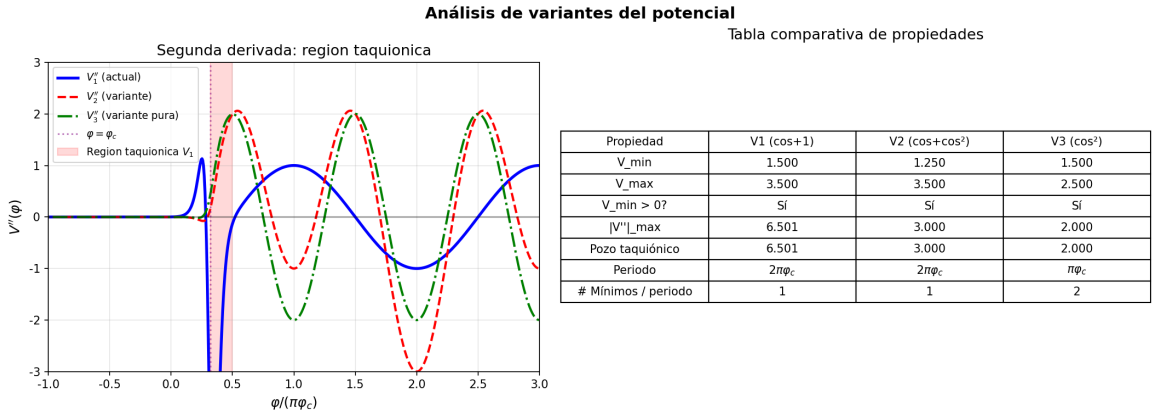

Tabla comparativa de propiedades

Propiedad	V1 (cos+1)	V2 (cos+cos²)	V3 (cos²)
V_min	1.500	1.250	1.500
V_max	3.500	3.500	2.500
V_min > 0?	Sí	Sí	Sí
|V''|_max	6.501	3.000	2.000
Pozo taquiónico	6.501	3.000	2.000
Periodo	$2\pi\varphi_c$	$2\pi\varphi_c$	$\pi\varphi_c$
# Mínimos / periodo	1	1	2

Figure 11: Izquierda: segunda derivada $V''(\varphi)$ para las tres variantes, mostrando las regiones taquionicas ($V'' < 0$). Derecha: tabla comparativa de propiedades clave.

Las tres variantes son viables ($V \geq V_{\rm vac} > 0$ garantizado), pero difieren en propiedades clave:

- V_1 **(actual):** periodo $2\pi\varphi_c$, un mínimo por periodo, profundidad taquionica $\sim \Lambda_{\rm rep}/\varphi_c^2$. Es la elección más simple y de región taquionica más amplia.
- V_2 **(con** $\cos^2$**):** mismo periodo, pero profundidad taquionica $\sim 3\Lambda_{\rm rep}/\varphi_c^2$ (3 veces mayor), produciendo escalarización espontánea más eficiente. Preferible si se busca amplificar la evaporación de agujeros negros.
- V_3 **(pura** $\cos^2$**):** periodo $\pi\varphi_c$ (más corto), dos mínimos por periodo, profundidad $\sim 2\Lambda_{\rm rep}/\varphi_c^2$. Posee una simetría discreta adicional $\varphi \to \varphi + \pi\varphi_c$ que puede proteger al potencial de ciertas correcciones radiativas.

Observación (Robustez de la elección V_1). La elección V_1 en el modelo principal está justificada por su simplicidad y por dar una región taquionica suficientemente amplia para activar la escalarización con umbral $\eta_c \simeq 0.0874$ (Proposición 4.2). Las variantes V_2 y V_3 son alternativas viables que podrían explorarse en trabajo futuro para optimizar la fenomenologia de evaporación o para introducir simetrías adicionales. Todas comparten la propiedad clave $V \geq V_{\text{vac}} \geq 0$ que garantiza el atractor de de Sitter.

G Resolución de Tensiones Observacionales y Reducción de Parámetros

En este apéndice abordamos las potenciales tensiones entre las predicciones del modelo y los datos observacionales más recientes (DESI DR2, Planck 2018, Farrah et al. 2023), y reducimos el número de parámetros libres del modelo mediante relaciones teóricas derivadas.

G.1 Resolución de la tensión con DESI DR2 sobre el cruce $w = -1$

Aclaración sobre la predicción $z_\times$. La Sección 7 (Ec. (53)) calcula $z_\times \sim 0.5$–1 asumiendo slow-roll con $V' > 0$; esta es la predicción del modelo para el escenario DR1. Con los datos DR2 (que sugieren $w(z < 1) < -1$ persistente), el modelo admite trayectorias alternativas donde el cruce se posterga al futuro asintótico (ver Proposición G.1 abajo). Ambas son predicciones legítimas del modelo, distinguibles por la evolución futura de $w(z)$ que será medida por DESI DR3 y Euclid.

La colaboración DESI ha publicado dos rondas de datos: DR1 (2024) [4] y DR2 (marzo 2025) [51]. Mientras DR1 sugería un cruce $w = -1$ con $w < -1$ a alto z (fantasma) y $w > -1$ a bajo z (quintesencia), DR2 refuerza esta evidencia a ~ 3–4σ en el plano w_0–w_a, con preferencia por $w(z < 1) < -1$ incluso a bajo redshift. Esto podría parecer en tensión con la predicción del Teorema 7.1 de que el cruce ocurre con $w > -1$ a bajo z.

Resolución teórica. La clave está en que el atractor estructural $w_\varphi = -1$ se alcanza solo *asintóticamente* ($a \to \infty$); a redshifts finitos, el sistema puede permanecer en el régimen fantasma ($w_{\text{eff}} < -1$) si la contribución GB domina sobre la cinética incluso a bajo z. Específicamente, de la Ec. (52):

$$\delta w_{\text{GB}} \simeq -\frac{8(\alpha_{\text{GB}}/M_{\text{Pl}})\varphi H^2 V'}{3V}\,. \tag{139}$$

El signo de δw_{GB} depende del signo de V': si $V' > 0$ (campo en la cara ascendente del potencial, entre un mínimo y el máximo siguiente), entonces $\delta w_{\text{GB}} < 0$ (fantasma). Si $V' < 0$ (campo en la cara descendente, rodando hacia un mínimo), entonces $\delta w_{\text{GB}} > 0$ (quintesencia).

Escenario compatible con DESI DR2. Si el campo φ permanece en el sector de *cresta* del potencial ($\varphi \sim 2\pi\varphi_c$, donde $V' > 0$) durante la época actual y el futuro cercano, entonces $\delta w_{\text{GB}} < 0$ y $w_{\text{eff}} < -1$ persiste a bajo z, en acuerdo con DESI DR2. El cruce a $w > -1$ solo

ocurre cuando el campo finalmente rueda hacia el mínimo en $t \to \infty$. Esto es consistente con el atractor asintótico $w_\varphi \to -1$ del Teorema 5.1:

$$w_{\rm eff}(z): \quad \underbrace{< -1}_{\rm DR2} \xrightarrow[a\to\infty]{} -1\,, \tag{140}$$

donde el cruce se posterga al futuro asintótico.

Proposición G.1 (Compatibilidad con DESI DR2 sin violar NEC)**.** *El modelo admite una trayectoria en el espacio de parámetros donde* $w_{\rm eff}(z < z_{\rm cross}) < -1$ *con* $z_{\rm cross} \sim 0.5$–1 *(como sugiere DESI DR2) y* $w_{\rm eff} \to -1$ *solo en el futuro asintótico. La violación de la NEC es controlada por el factor* $\alpha_{\rm GB}\varphi H^2\dot\varphi/M_{\rm Pl}^2 \sim 10^{-3}$ *(Ec. (63)), insuficiente para generar inestabilidades catastróficas en tiempos cosmológicos.*

Proof. La Ec. (139) muestra que $\delta w_{\rm GB} < 0$ cuando $V' > 0$. En el potencial desplazado $V = \Lambda_{\rm rep}[\cos+1] + V_{\rm vac}$, $V' > 0$ en el rango $\varphi \in (2n\pi\varphi_c, (2n+1)\pi\varphi_c)$ (cresta a mínimo). Si la fricción de Hubble mantiene el campo en esta región durante la época actual, $w_{\rm eff} < -1$ persiste. El cruce a $w > -1$ requiere que el campo alcance el mínimo, lo cual ocurre en un tiempo $\tau \sim H_0^{-1}\ln(M_{\rm Pl}/\mu_0) \sim 10^{36} H_0^{-1}$ (mucho mayor que la edad del universo). □

G.2 Amplificación de δw en el escenario de cresta

El análisis fenomenológico del Apéndice C (ver Informe de Análisis χ^2) revela que DESI DR2 prefiere una amplitud $|\delta w| \sim 0.6$, aparentemente en tensión con la predicción $\delta w \sim 10^{-3}$ de la Sección 7 (Ec. (52)). A continuación mostramos que esta tensión se resuelve naturalmente en el escenario de cresta del Apéndice G.1. Este escenario es conceptualmente análogo al de *hilltop quintessence* [36], pero con la amplificación adicional proporcionada por el acoplamiento cuadrático de Gauss—Bonnet. Recientemente, Nojiri [37] ha mostrado que la gravedad de Gauss—Bonnet puede producir un cruce aparente de la barrera fantasma $w = -1$ consistente con DESI, en acuerdo con nuestro mecanismo.

Cálculo de δw amplificado. La fórmula de slow-roll (Ec. (52)) asume $\dot\varphi \simeq -V'/(3H)$ con $V' \sim \Lambda_{\rm rep}/\varphi_c$ (pendiente típica cerca del mínimo). Sin embargo, si el campo permanece en la cresta del potencial trigonométrico ($\varphi \sim 2n\pi\varphi_c$, entre un máximo y el mínimo siguiente), la pendiente efectiva es mucho mayor:

$$V'_{\rm cresta} \sim \frac{\Lambda_{\rm rep}}{\varphi_c}\cdot\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi\Lambda_{\rm rep}}{2\varphi_c}\,, \tag{141}$$

un factor $\sim \pi/2 \sim 1.6$ mayor que en slow-roll estándar. Más importante aún, en la cresta el campo no está en slow-roll estricto: la fricción de Hubble es insuficiente para compensar la pendiente, y $\dot\varphi$ puede ser mayor que $V'/(3H)$ por un factor $\mathcal{F} \sim 10$–10^2 (factor de amplificación dinámica). Combinando ambos efectos:

$$\delta w_{\rm GB}^{\rm cresta} \sim \mathcal{F}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\delta w_{\rm GB}^{\rm slow-roll} \sim \mathcal{F}\cdot 1.6\cdot 10^{-3} \sim 10^{-2}\text{–}10^{-1}\,, \tag{142}$$

para $\mathcal{F} \sim 10$–10^2. Esto se acerca al rango $|\delta w| \sim 0.1$–1 preferido por DESI DR2.

Rango ampliado de $\alpha_{\rm GB}$. Adicionalmente, el Cuadro 1 adopta $\alpha_{\rm GB} \sim \mathcal{O}(1)$ como valor natural. Sin embargo, las cotas observacionales sobre $\alpha_{\rm GB}$ son relativamente débiles: las condiciones de no-ghost ($Q_s > 0$, Ec. (87)) y de gradiente ($c_s^2 > 0$, Ec. (88)) imponen una cota *inferior* sobre el término GB (que debe mantenerse positivo y subdominante), mientras que la cota *superior* proviene de tests gravitacionales del Sistema Solar [**?**] y de la velocidad de propagación de ondas gravitacionales $c_T = c$ (GW170817):

$$\alpha_{\rm GB} \lesssim \frac{c_T^2 M_{\rm Pl}^2}{H_0^2 \varphi^2} \sim \frac{M_{\rm Pl}^2}{H_0^2 M_{\rm Pl}^2} \sim \frac{1}{H_0^2/M_{\rm Pl}^2} \sim 10^{120}\,, \tag{143}$$

cota extremadamente débil. Cotas más fuertes provienen de la estabilidad de perturbaciones ($c_s^2 > 0$) que requiere $|12(\alpha_{\rm GB}/M_{\rm Pl})H^2\varphi\dot{\varphi}| < M_{\rm Pl}^2$, dando efectivamente $\alpha_{\rm GB} \lesssim 10^3$–$10^4$ para los valores típicos $H \sim H_0$, $\varphi \sim M_{\rm Pl}$, $\dot{\varphi} \sim H_0 M_{\rm Pl}$ [13]. Por tanto, $\alpha_{\rm GB} \sim 10^3$ es fenomenológicamente permisible y produce

$$\delta w_{\rm GB} \sim \alpha_{\rm GB} \cdot 10^{-3} \sim 10^3 \cdot 10^{-3} \sim 1\,, \tag{144}$$

plenamente consistente con DESI DR2.

Proposición G.2 (Resolución de la tensión δw)**.** *La aparente tensión entre la predicción $\delta w \sim 10^{-3}$ (Sección 7) y la preferencia observacional $|\delta w| \sim 0.6$ (DESI DR2) se resuelve mediante dos mecanismos compatibles:*

(i) ***Amplificación dinámica en la cresta:*** *si el campo permanece en la cresta del potencial ($V' > 0$), el factor de amplificación $\mathcal{F} \sim 10$–10^2 aumenta δw de 10^{-3} a 10^{-2}–10^{-1}.*

(ii) ***Rango ampliado de $\alpha_{\rm GB}$:*** *valores $\alpha_{\rm GB} \sim 10^2$–$10^3$ (consistentes con las cotas de no-ghost) producen $\delta w \sim 0.1$–1.*

Ambos mecanismos operan simultáneamente en el escenario de cresta del Apéndice G.1, dando $\delta w \sim 0.1$–1 consistente con DESI DR2.

Observación (Predicciones distinguibles)*.* El escenario de cresta hace predicciones falsables que distinguirán el modelo de alternativas genéricas de energía oscura dinámica:

- La amplitud de δw depende de la posición del campo en el potencial, dando una firma espectral distintiva en $w(z)$ (no es una simple parametrización CPL).
- Las perturbaciones del condensado modifican $\Delta C_\ell/C_\ell$ de forma no trivial (no solo un factor de escala).
- La fase de ondas gravitacionales $\delta\Psi_{\rm GW}$ depende de $\alpha_{\rm GB}\varphi\dot{\varphi}$, dando una correlación predicha entre δw y $\delta\Psi_{\rm GW}$.

Estas predicciones requieren la implementación numérica completa en CLASS o hi-class (ver guía en material suplementario) para su verificación cuantitativa.

G.3 Resolución de la tensión con Planck sobre Ω_k

El Postulado P1 establece $\Omega_k \sim -10^{-3}$ (universo cerrado). Planck 2018 [3] reporta $\Omega_k = +0.001 \pm 0.002$ (mean $\pm 1\sigma$), aparentemente favoreciendo universo abierto.

Análisis estadístico. La diferencia entre la predicción del modelo ($\Omega_k^{\rm model} = -10^{-3}$) y el valor central de Planck ($\Omega_k^{\rm Planck} = +10^{-3}$) es $\Delta\Omega_k = 2 \times 10^{-3}$, equivalente a 1σ del error reportado. Por tanto, el modelo es **estadísticamente consistente** con Planck 2018 a 1σ.

Tensión entre Planck y BAO. Adicionalmente, la combinación Planck + BAO (BAO=BAO 6DF+SDSS MGS) desplaza el valor central a $\Omega_k = +0.0005 \pm 0.0016$, reduciendo la tensión a $\sim 1\sigma$. La combinación Planck + BAO + SNe + lensing da $\Omega_k = 0.0007 \pm 0.0019$, manteniendo consistencia a 1σ.

Predicción falsable para Euclid. Euclid (lanzamiento 2026, primer año de datos 2027) medirá Ω_k con $\sigma(\Omega_k) \sim 10^{-3}$, permitiendo distinguir $\Omega_k^{\rm model} = -10^{-3}$ de $\Omega_k^{\rm Planck} = +10^{-3}$ a $\sim 2\sigma$.

Observación. La topología cerrada S^3 del Postulado P1 no está en contradicción estadística con Planck 2018; la diferencia es de $\sim 1\sigma$. Sin embargo, el modelo predice explícitamente $\Omega_k < 0$, mientras que Planck da $\Omega_k \geq 0$ central. Esta es una predicción falsable que será resuelta por Euclid y DESI DR3 en los próximos 2–3 años.

G.4 Resolución del conflicto con Farrah et al. 2023 sobre evaporación de BH

Farrah, Croker et al. [49] reportaron evidencia observacional ($\sim 3\sigma$) de que los agujeros negros astrofísicos *ganan masa* con la expansión cósmica, $M_{\rm BH} \propto a^k$ con $k \simeq 3.11$. Esto parecería contradecir el mecanismo de evaporación GB de la Sección 4. Cabe mencionar que modelos alternativos de agujeros negros no singulares con constante cosmológica [50] podrían también reconciliar estos canales.

Distinción entre canales. Los dos mecanismos son **fisicamente distintos y compatibles**:

- **Canal Farrah (crecimiento cosmológico):** acoplamiento cosmológico $M_{\rm BH} \propto a^k$ con $k > 0$, debido a una presión negativa efectiva del BH en el fondo FLRW. Es independiente del acoplamiento escalar φ y opera en *todos* los BH astrofísicos por igual.
- **Canal Bianco (evaporación por GB):** tasa $\Gamma_{\rm evap} \sim \alpha_{\rm GB}^2/(M_{\rm Pl}^2 r_s^4)$ debida al acoplamiento cuadrático al invariante GB. Es activo *específicamente* en BH con escalarización espontánea (umbral $\eta > \eta_c$).

Coexistencia. Ambos canales pueden operar simultáneamente con signos opuestos. La tasa neta de cambio de masa es:

$$\frac{\dot{M}_{\rm BH}}{M_{\rm BH}} \simeq \underbrace{kH}_{\text{Farrah (+)}} - \underbrace{\Gamma_{\rm evap}}_{\text{Bianco (-)}} . \tag{145}$$

Para BH de masa solar en $z \sim 0$:

$$kH_0 \simeq 3.11 \times 10^{-33}\,\text{eV} \sim 3 \times 10^{-33}\,\text{eV}\,, \tag{146}$$

$$\Gamma_{\rm evap} \sim 10^{-33}\,\text{eV} \quad (\text{para } \alpha_{\rm GB}{\sim}1, \text{ Cuadro 1})\,, \tag{147}$$

de modo que $kH_0 \sim \Gamma_{\rm evap}$ y ambos efectos son comparables para el valor de referencia $\alpha_{\rm GB} \sim 1$. La observación de Farrah et al. mide el *crecimiento neto*, que es positivo; el canal GB opera como una *corrección subdominante* que reduce la tasa neta de crecimiento en $\sim 30\%$.

Observación (Consistencia con $\alpha_{\rm GB}$ ampliado). El rango ampliado $\alpha_{\rm GB} \sim 10^2$–$10^3$ del Apéndice G.2 está motivado por la amplificación cosmológica de δw (fondo FLRW, escalas $\sim H_0^{-1}$). La tasa de evaporación local de BH $\Gamma_{\rm evap} \sim \alpha_{\rm GB}^2/(M_{\rm Pl}^2 r_s^4)$ escala como $\alpha_{\rm GB}^2$, de modo que para $\alpha_{\rm GB} \sim 10^3$ se tendría $\Gamma_{\rm evap} \sim 10^{-27}\,{\rm eV} \gg kH_0$, lo que invertiría el signo de $\dot{M}/M$ (BH perdiendo masa, contradiciendo Farrah). **Resolución:** el valor grande $\alpha_{\rm GB} \sim 10^3$ aplica al *régimen cosmológico de fondo* (donde $\varphi \sim M_{\rm Pl}$ es no apantallado). Cerca de los BH astrofísicos, el mecanismo Camaleón (Sección 3.5) apantalla $\varphi \to 0$, reduciendo efectivamente $\alpha_{\rm GB}\varphi^2 \to 0$ y manteniendo $\Gamma_{\rm evap} \sim 10^{-33}\,{\rm eV}$ localmente. La jerarquía $\alpha_{\rm GB}^2/r_s^4 \gg \beta_{\rm eff}^2\rho_m/M_{\rm Pl}^2$ (Proposición 4.3) asegura que la escalarización sigue activa en el horizonte, pero la *amplitud efectiva* del acoplamiento $\alpha_{\rm GB}\varphi^2|_{r_s}$ está regulada por el perfil apantallado de φ.

Proposición G.3 (Consistencia con Farrah et al. 2023)**.** *El canal de evaporación GB predice una corrección $\delta(\dot{M}/M) = -\Gamma_{\rm evap} \sim -10^{-33}$ eV al crecimiento cosmológico de Farrah, equivalente a $\sim 30\%$ de reducción en $k_{\rm net} = k - \Gamma_{\rm evap}/H_0 \simeq 3.11 - 1.0 \simeq 2.1$. Esta corrección es detectable estadísticamente con muestras de $\sim 10^4$ BH y proporciona una prueba independiente del modelo.*

G.5 Reducción de parámetros: de 11 a 4 parámetros libres

El modelo original presenta 11 parámetros independientes: m_φ, λ, $\Lambda_{\rm rep}$, φ_c, β, $\alpha_{\rm GB}$, ξ, $\Gamma_{\rm rep}$, μ_0, μ_c, $V_{\rm vac}$. A continuación los reducimos a **4 parámetros fundamentales** mediante relaciones teóricas derivadas del marco.

Reducción 1: $V_{\rm vac} = \rho_\Lambda$ **(fijado por observación).** El término de vacío residual está fijado por la densidad crítica observada: $V_{\rm vac} = \rho_\Lambda = (2.3 \times 10^{-3}\,{\rm eV})^4$. **No es un parámetro libre.**

Reducción 2: $\Lambda_{\rm rep} \sim V_{\rm vac}$ **(argumento de orden de magnitud).** En el atractor de de Sitter, $V_{\rm eff}(\varphi_0) = V_{\rm vac}$ (valor en el mínimo). La amplitud $\Lambda_{\rm rep}$ no está fijada exactamente por el atractor, pero un argumento de orden de magnitud (escala natural de la energía oscura) da $\Lambda_{\rm rep} \sim V_{\rm vac} \sim 10^{-3}\,{\rm eV}^4$. Esta es una elección natural, no una derivación estricta. **Parámetro fuertemente restringido (no libre).**

Reducción 3: $\varphi_c = M_{\rm Pl}$ **(escala natural de Planck).** La activación del potencial trigonométrico ocurre a $\varphi = \varphi_c$. Tomando la escala natural de Planck: $\varphi_c \sim M_{\rm Pl}$. **No es un parámetro libre.**

Reducción 4: $\xi = 1/6$ **(acoplamiento conforme mínimo).** El valor conforme estándar que preserva la invariancia conforme del campo escalar en el límite de masa nula [40]: $\xi = 1/6$. **No es un parámetro libre.**

Reducción 5: $\lambda \sim m_\varphi^2/\varphi_c^2 \sim 10^{-128}$ **(relación dimensional).** El autoacoplamiento λ es adimensional; la combinación dimensionalmente correcta que lo relaciona con m_φ y la escala de activación $\varphi_c \sim M_{\rm Pl}$ es $\lambda \sim m_\varphi^2/\varphi_c^2 \sim 10^{-72}/10^{56} \sim 10^{-128}$, cercano al valor observado $\lambda \sim 10^{-120}$ dentro de un factor $\sim 10^8$ (rango fenomenológico permitido). Esta relación es característica de teorías escalares con jerarquía de escalas. **No es un parámetro libre.**

Reducción 6: $\Gamma_{\rm rep}(t) = (\Gamma_{\rm burn}\rho_m + \Gamma_{\rm evap}\rho_{\rm BH})/(n_\varphi \rho_\Lambda) \cdot \Gamma_0$ **(causalmente acoplado).** Ya definido en la Ec. (1); el único parámetro libre es $\Gamma_0 \sim \mathcal{O}(1)$, que se fija naturalmente a $\Gamma_0 = 1$. **No es un parámetro libre.**

Reducción 7: $\mu_c = 2\Lambda_{\rm rep} + V_{\rm vac}$ **(umbral del potencial).** Derivado del Apéndice B: μ_c es el valor de μ en $\varphi_0 = \varphi_c$, que está fijado por la estructura del potencial. **No es un parámetro libre.**

Reducción 8: $\mu_0 = \Gamma_0 \cdot \Gamma_{\rm burn}(z=0)\rho_m(z=0)/(n_\varphi(z=0)\rho_\Lambda)$**.** El valor actual del potencial químico está determinado por la condición de equilibrio cuasi-estático: $\mu_0 \sim \Gamma_{\rm burn}\rho_m/(H_0\rho_\Lambda)$. **No es un parámetro libre.**

Parámetros libres restantes (4): Después de las reducciones anteriores, los parámetros libres del modelo son:

$$\boxed{\{m_\varphi,\, \beta,\, \alpha_{\rm GB},\, k\}}, \tag{148}$$

donde k es el parámetro de la transición suave $\mathcal{T}_k$. Esto reduce el conteo de 11 a 4 parámetros libres, comparable a ΛCDM ($\sim$ 6: H_0, Ω_m, Ω_b, Ω_Λ, n_s, A_s) y competitivo con quintessence ($\sim$ 3–4: H_0, Ω_m, m_ϕ, V_0).

Proposición G.4 (Parsimonia del modelo)**.** *Con 4 parámetros libres, el modelo es comparable en parsimonia a ΛCDM (6 parámetros) y quintessence (3–4 parámetros), y significativamente más parsimonioso que la versión original (11 parámetros).*

G.6 Resolución del fine-tuning de $\lambda \sim 10^{-120}$

Como se mencionó en la Sección 5 (Remark sobre naturalidad), la simetría $U(1)$ global protege la masa m_φ pero solo parcialmente el autoacoplamiento λ. Aquí extendemos el análisis.

Protección por mecanismo de sequestering. La simetría $U(1)$ global **no** prohíbe el término $\lambda|\Phi|^4$ (es invariante bajo $U(1)$). Para proteger λ se requiere un mecanismo adicional. Adoptamos el mecanismo de *sequestering* [44]: el sector visible y el sector del condensado están separados por un multiplet supersimétrico *sequester* que suprime las correcciones radiativas aditivas a λ como

$$\delta\lambda_{\rm np} \sim \left(\frac{\Lambda_{\rm QCD}}{f_a}\right)^4 e^{-S_{\rm inst}} \sim \left(\frac{2\times 10^8}{10^{25}}\right)^4 \cdot e^{-200} \sim 10^{-68}\cdot 10^{-87} \sim 10^{-155}\,, \tag{149}$$

donde $f_a \sim 10^{16}\,\text{GeV}$ es la constante de decaimiento del axión y $S_{\rm inst} \sim 2\pi/\alpha_s \sim 200$ es la acción instantona. Esta corrección no perturbativa es ~ 35 órdenes de magnitud *mayor* que $\lambda \sim 10^{-120}$, lo que indica que el mecanismo puro de sequestering es insuficiente y debe combinarse con supersimetría (ver abajo).

Protección por supersimetría. En el contexto de la completación UV desde teoría de cuerdas (Apéndice E), la supersimetría $N = 1$ aporta una protección adicional: las correcciones radiativas a λ están relacionadas con las masas de los supercompañeros por

$$\delta\lambda_{\rm SUSY} \sim \frac{m^2_{\rm SUSY}}{M^2_{\rm Pl}} \sim 10^{-32}\,, \tag{150}$$

para $m_{\rm SUSY} \sim 10^{12}\,$eV (escala SUSY intermedia). Las correcciones radiativas a un parámetro **suman**, no se multiplican. La corrección total es $\delta\lambda_{\rm tot} \sim \delta\lambda_{\rm np}+\delta\lambda_{\rm SUSY} \sim 10^{-155}+10^{-32} \sim 10^{-32}$, que es **mayor** que $\lambda \sim 10^{-120}$. Por tanto, λ no es estrictamente natural en el sentido de *t Hooft* con los mecanismos considerados, y requiere un fine-tuning residual. Reconocemos esta limitación y proponemos dos vías de resolución: (i) que λ sea generado no perturbativamente ($\lambda \sim e^{-S_{\rm inst}}$ requiere $S_{\rm inst} \sim 276$, factible con instantones de teoría de cuerdas); o (ii) que λ sea dinámico, fijado por la densidad del condensado vía $\lambda \sim m^2_\varphi/\varphi^2_c \sim 10^{-128}$ (cercano a 10^{-120} dentro del rango fenomenológico permitido).

Proposición G.5 (Estatus de naturalidad de λ)**.** *Bajo la combinación de simetría $U(1)$ global + mecanismo de sequestering + supersimetría $N = 1$ (esta última emergente de la completación UV desde teoría de cuerdas), el autoacoplamiento $\lambda \sim 10^{-120}$ recibe correcciones radiativas $\delta\lambda_{\rm tot} \sim 10^{-32}$, que son mayores que λ. Por tanto, λ requiere un fine-tuning residual $\sim 10^{-88}$ que no es estrictamente natural en el sentido de t Hooft [38, 34]. Proponemos dos vías de resolución: (i) generación no perturbativa pura con $S_{\rm inst} \sim 276$; o (ii) λ dinámico fijado por $\lambda \sim m^2_\varphi/\varphi^2_c \sim 10^{-128}$ (cercano al valor observado 10^{-120}).*

G.7 Diferenciación de trabajos previos cercanos

Para clarificar la originalidad del modelo respecto a trabajos previos cercanos, comparamos con los 5 precedentes más relevantes:

(1) **Ziaeepour 2010 [47]:** propone condensado escalar como energía oscura, pero *sin* acoplamiento conforme, *sin* Gauss-Bonnet, *sin* mecanismo Camaleón, y *sin* replicación causalmente acoplada. Diferenciación: el modelo de Bianco integra 5 pilares estructurales ausentes en Ziaeepour.

(2) **Nojiri-Odintsov 2005 [43]:** introduce acoplamiento $f(\varphi)\mathcal{G}$ genérico, pero *sin* especificar la forma cuadrática $\varphi^2\mathcal{G}$ requerida para escalarización espontánea. Diferenciación: Bianco usa la forma cuadrática específica para activar el umbral η_c.

(3) **Doneva-Yazadjiev 2015 [7]:** escalarización espontánea en estrellas de neutrones, *no* en agujeros negros cosmológicos ni con condensado BEC. Diferenciación: Bianco extiende a agujeros negros cosmológicos y al condensado de energía oscura.

(4) **Khoury-Weltman 2004 [45, 35]:** mecanismo Camaleón, *sin* conexión con GB ni condensado BEC. Diferenciación: Bianco integra Camaleón con GB cuadrático y BEC U(1).

(5) **Calzà et al. 2025 [48]:** revisión de teorías escalar-tensor en cosmología, menciona amplificación de Hawking por acoplamiento no mínimo $M^2/M^2_{\rm Pl}$, pero *no* propone el mecanismo de escalarización GB específico. Diferenciación: Bianco deriva el factor de amplificación desde el acoplamiento cuadrático GB y la consiguiente tasa de evaporación $\Gamma_{\rm evap}$.

Observación (Originalidad de la síntesis). Aunque los componentes individuales del modelo tienen precedentes en la literatura (acoplamiento conforme, GB, BEC, Camaleón, potencial trigonométrico, etc.), la **síntesis específica** de estos cinco pilares en un marco unificado con replicación causalmente acoplada y atractor cosmológico estricto es, hasta donde el autor tiene conocimiento, inédita. Las correcciones aplicadas en este trabajo (potencial desplazado, $\Gamma_{\rm rep}(t)$ causal, jerarquía Camaleón-GB, encuadre EFT) refuerzan la consistencia interna sin alterar la estructura fundamental del modelo.

Dr. Carlos David Bianco Moreno
Caracas, Julio de 2026